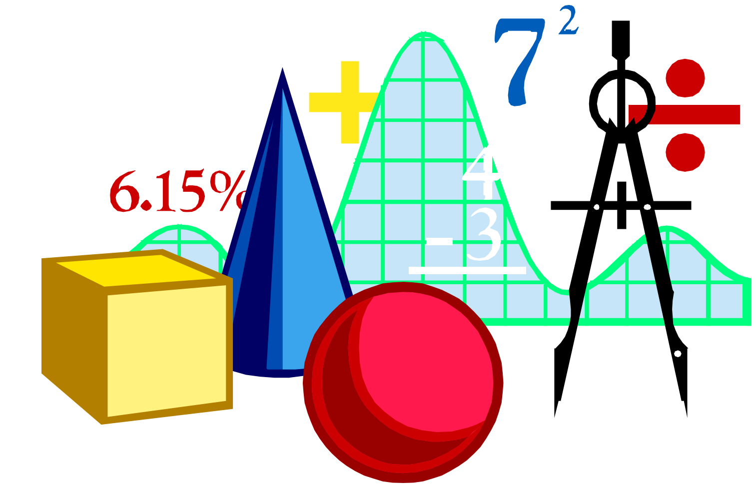
Formel-Sammlung

Algebra



Autor: Drifte Marcel

Datum: 19. Nov. 2006

Dokumentname: **Algebra.sxw** *(openoffice.org)*

Dokument zu finden unter: **www.formelsammlung.telabo.ch**

Inhaltsverzeichnis

1. Allgemein

1.1 Mengenlehre

Leere Menge	{ }
Menge der natürlichen Zahlen	{ 0,1,2,3,4,... }
Menge der nat. Zahlen ohne 0	{ 1,2,3,4,... }
Menge der ganzen Zahlen	{ ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,... }
Menge der rationalen Zahlen	$\{ x \mid x = \frac{p}{q}; p \in Z; q \in N^* \}$

1.2 Grundlagen

Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

Dies gilt für

$(n \geq 1)$

Per Definition:

$0! = 1$

Binominalkoeffizenten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

Das kann durch das Pascalische Dreieck dargestellt werden

	k=0	=1	=2	=3	=4	=5	=6	=7	=8	=9
n=0	1									
=1	1	$\boxed{1}$								
=2	1	2	1							
=3	1	3	$\boxed{3}$	1						
=4	1	4	6	4	1					
=5	1	5	10	$\boxed{10}$	5	1				
=6	1	6	15	20	15	6	1			
=7	1	7	21	35	$\boxed{35}$	21	7	1		
=8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
=9	1	9	36	84	126	$\boxed{126}$	84	36	9	1

Funktion beim HP48GX

[MTH][PROB][COMB]

Daraus folgt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.2.1 Betrag

Im Taschenrechner unter `ABS(x)`

Regel:

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

Allgemeine Rechenregel:

$$a = |a| \cdot \operatorname{sgn}(a)$$

$$|-a| = |a|$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Für reele Zahlen gilt

$$|x^2| = x^2$$

$$\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(b)$$

Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

1.2.2 Logarithmen

Stöcker S.50f

Allgemein:

$a^x = b$ *(a>0)*

$x = \log_a b$ *manchmal auch als* ${}^a\log\, b$ *geschrieben*

Umformungsregeln

$$\log_a(y) = \log_a(x) \Leftrightarrow y = x$$

$$\log(y) < \log(x) \Leftrightarrow y < x$$

Summe:

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a(b_1) + \log_a(b_2)$$

Differenz:

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

Potenz:

$$\log_a(b^n) = n \times \log_a(b)$$

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

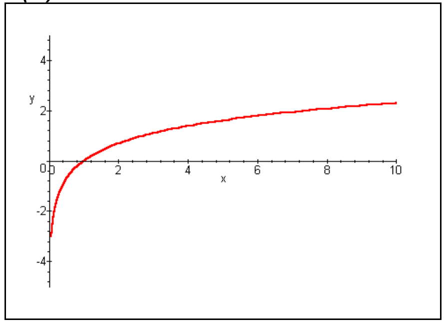
Wurzel:

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \log_a\left(u^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \times \log_a(u)$$

Wechseln der Basis

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\lg(x)}{\lg(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

G(ln)



1.3 Polynome

1.3.1 Horner-Schema

- Das Hornerschema hilft einem bei der Berechnung von Funktionswerten einer ganzrationalen Funktion sowie das schrittweise reduzieren einer Polynom Funktion(abspalten einer Nullstelle).

$$P(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		a_3x_0	$(a_2+a_3x_0)x_0$	$(a_1+a_2x_0+a_3+x^2_0)x_0$
	a_3	$a_2+a_3a_0$	$a_1+a_2x_0+a_3x^2_0$	$a_0+a_1x_0+a_2x^2_0+a_3a^3_0$

- Das Hornerschema kann verwendet werden um zB. den wert des Polynoms P(x) an der Stelle x_0 zu berechnen.

Mit dem HP GX48

Für konstante Koeffizienten kann
[SOLVE-POLY] Verwendet werden
Die Koeffizienten werden in [... a_3 a_2 a_1 a_0] angegeben.

1.3.2 Nullstelle aus einer quadratischen Funktion

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

Stöcker s 60.

1.3.3 Lösungsmenge

$$D = b^2 - 4ac$$

D: Diskriminate

Diskriminate	Lösungen
D=0	Gibt es nur eine reelle Lösung
D>1	Gibt es zwei reelle Lösungen
D<0	Komplexe Lösungen

1.3.4 Satz von Vieta im Stöcker p.60

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

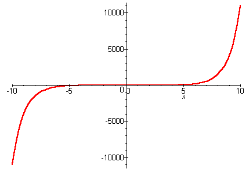
Mit dem HP GX48

[VAR] [ALGE] [Q.GLEI]

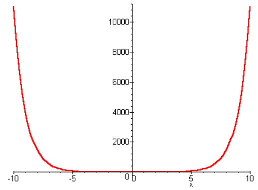
1.4 Hyperbolische Funktionen

1.4.1 Definition

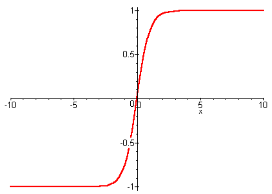
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



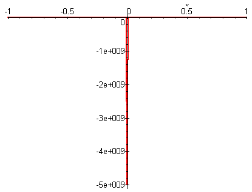
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$



$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$



1.4.2 Eigenschaften

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

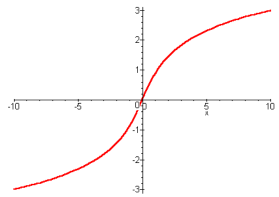
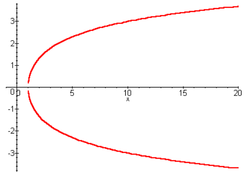
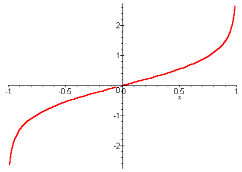
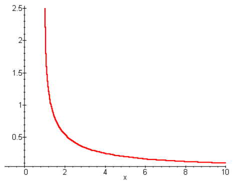
$$\cosh(x+y) = \cos(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\sinh(-x) = -\sinh(x)$$ “ungerade Funktion“

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$ “gerade Funktion“

1.4 Area Funktionen

1.4.1 Definition

$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$	
$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$	
$\operatorname{arctanh}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ $\operatorname{arctan}\,h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	
$\operatorname{arccoth}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ $\operatorname{arc}\,\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	

2. Matrizen

2.1 Was sind Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & .. & a_{3m-1} & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nm-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrizen sind in Spalten und Zeilen aufgeteilt: Wobei **m** der Spaltenindex und **n** der Zeilenindex ist

2.2 Inverse einer Matrix

Vorgehen:

Die Matrix muss gleich viel Spalten wie Zeilen haben.
Nach Gaus-Jordan
An die Bestehende Matrix wird eine Einheitsmatrix angehängt.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{}^{\text{Einheitsmatrix}}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dann mittels **Gausselimination** die Matrix in folgende Form bringen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Die **Inverse** ist somit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \end{pmatrix}$$

Schnelle 2x2 Matrixinverse

Nur Invertierbar wenn (ad-bc) ≠ 0

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

$$A \cdot A^{-1} = 1$$

1 ist die Einheitsmatrix

$$A^{-1} \cdot A = 1$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Bem:
Matrizen können nicht Dividiert werden!

Mit dem HP [1/x] für Numerische und [LIBRARY][ALG][AINV] für Symbolische Matrizen.

Num: [[1 2] [3 4]]
Sym: {{ 1 2 } {3 4}}

2.3 Die Transponierte einer Matrix

Vorgehen:

Matrix an der Haupt diagonale Kippen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{pmatrix}$$

Rechenregel

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

Falls A^{-1} existiert gilt:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Mit dem HP [MTH][MATR][MAKE][TRN] für Numerische und [LIBRARY][ALG][ATRN] für Symbolische Matrizen.

Num: [[1 2] [3 4]]
Sym: {{ 1 2 } {3 4}}

2.4 Rang einer Matrize

$$r = Rg(A)$$

Bei Zeilenumformungen ändert sich der Rang nicht.

Mit dem HP 48 MTH][[MATR][NORM][RANK]

Der Rang einer Matrize sind die Anzahl nicht verschwindene Zeilen nach dem man sie auf Dreiecks oder Trapezform gebracht hat.
Die Dreiecks oder Trapezform erhält man zb. durch den Gausalgorytmus.

Anwendungen:
Über den Rang kann bei einem Gleichungssystem die Lösungsmenge bestimmt werden.

2.5 Multiplikation

Multiplikation nach dem Falkscheme (Stöcker 408)

Matrix B muss gleich viel Zeilen haben wie A Spalten hat.

C=AB

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & C \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} & & b_{11} & b_{12} \\ & & b_{21} & b_{22} \\ \hline a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Allgemein

$$c_{xy} = \sum_{k=1}^{1} a_{xk} \cdot b_{ky}$$

Regeln

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

2.6 Determinanten

Man Schreibt:
Haupt diagonale
Neben diagonale

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik}$$

Eine Determinante ist eine Abbildung die eine Quadratische Matrix A eindeutig eine reelle (komplexe) Zahl zuordnet.

Man liest „Determinante von A" Dabei ist n die Ordnung der Determinante

2x2-Matrix

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

3x3-Matrix

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

nxn Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Mittels Gauseleminationsverfahren die Matrix in 3-Eckform bringen so wie unten.

Danach nach folgender Formel

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Mit dem HP [MTH][MATR][NORM]DET] für Numerische und [LIBRARY][ALG][ADET] für Symbolische Matrizen.

Num: [[1 2] [3 4]]
Sym: {{ 1 2 } {3 4}}

Rechenregeln:

$$[A \cdot B] = [A] \cdot [B] \qquad [A^{-1}] = \frac{1}{[A]}$$

Oder auch mit dem Entwicklungssatz nach Laplace STÖCKER P415,416

Allgemeine Regeln:

1. Vertauschen von Spalten

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

Vertauschen von zwei Spalten führt zu Änderung des Vorzeichens der Determinante

2. $\det(A^T) = \det(A)$

Die Determinanten der Transponierten Matrix ist gleich der Determinanten der Matrix

3. Alles was für Spalten gilt, gilt auch für Zeilen.
Bsp Es ändert sich das Vorzeichen der Determinante wenn man zwei Spalten vertauscht

4. $\lambda \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix}$

Multipliziert man eine Spalte(Zeile) mit einem Faktor λ, dann ändert sich die Determinante um den selben Faktor.

5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & (b + \alpha \cdot a) \\ c & (d + \alpha \cdot c) \end{vmatrix}$

Addiert man ein Vielfaches einer Spalte(Zeile) zu einer anderen Spalte(Zeile) dann ändert sich die Determinate nicht!

6. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ wenn a + b= α (c + d) oder a + c= α (b + d)

Sind die Zeilen(Spalten) eine Matrix liniear abhängig so verschwindet die Determinante

7. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Folgerung:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Wenn man die Determinante eines Produkts betrachtet gilt folgendes:

8. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Determinanten einer Dreiecksmatrix berechnet sich aus den Produkten der Diagonalelemente

9. $\det(A) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_k & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

Bei Speziellen Formen:
Wobei:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.7 Lösung von Gleichungssysteme mittels Determinante(Carmen-Reg)

Gleichungssystem mit 3 Unbekannten

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Mittels Determinaten kann folgendermassen nach x,y und z aufgelöst werden:

Vektorschreibweise	Ausgeschrieben:
Für x: Spalte 1 ist durch d ersetzt $x = \frac{[\vec{d},\vec{b},\vec{c}]}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}$	$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$
Für y: Spalte 2 ist durch d ersetzt $y = \frac{[\vec{a},\vec{d},\vec{c}]}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}$	$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$
Für z: Spalte 3 ist durch d ersetzt $z = \frac{[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}$	$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

Bemerkung:
Es können beliebige (Singuläre) Gleichungen mit n Gleichungen und n Unbekannten gelöst werden. Es wird hierbei wie oben für die erste Unbekannte(x) bei der Det() im Nenner die 1.Spalte durch die Letzte Spalte (d) ersetzt, für die 2. Unbekannte (y) die 2. Spalte durch die Letzte ersetzt usw.

2.7 Das Simplex-Verfahren

Vorgehen:

1. Bestimmung des Pivoelements

1. Das Pivoelement muss negativ sein
2. Das Pivoelement muss oberhalb von eines positiven z-Elements liegen
3. Kleinstes Element suchen außer in der [1] (pivo) Spalte.

$$\frac{\text{Element[Pivospalte][y]}}{\text{Element[Letzten(Konstanten)Spalte][y]}}$$

Der negativste Quotient von oben ist das gesuchte Pivoelement

2.Beschriftung

Beschriftung Pivospalte mit Pivozeile vertauschen

Vorher

	x_1	x_2	1
y_1	Pivo		
y_2			
z			

Nachher

	y_1	x_2	1
x_1	Pivo		
y_2			
z			

3. Pivoelement berechnen

-Kehrwert des Pivo Element Pivo = 1/PivoAlt

Vorher(Alt)

	x_1	x_2	1
y_1	-5	-6	4
y_2	-1	-2	7
z	4	15	0

Nachher

	y_1	x_2	1
x_1	-1/5		
y_2			
z			

4. Pivozeile berechnen

Pivozeile[x]= -PivozeileAlt[x]/PivoAlt

Vorher(Alt)

	x_1	x_2	1
y_1	-5	-6	4
y_2	-1	-2	7
z	4	15	0

Nachher(Neu)

	y_1	x_2	1
x_1	-1/5	-6/5	4/5
y_2			
z			

5. Restliche (ohne Pivospalte) berechnen

Eintrag[x][y]=PivospalteNeu[x]*PivoZeileAlt[y] + EintragAlt[x][y]

Vorher(Alt)

	x_1	x_2	1
y_1	-5	-6	4
y_2	-1	-2	7
z	4	15	0

Nachher(Neu)

	y_1	x_2	1
x_1	-1/5	-6/5	4/5
y_2		-4/5	31/5
z		51/5	16/5

6.Pivospalte berechnen

Pivospalte[y]=PivospalteAlt[y]/PivoAlt

Vorher(Alt)

	x_1	x_2	1
y_1	-5	-6	4
y_2	-1	-2	7
z	4	15	0

Nachher(Neu)

	y_1	x_2	1
x_1	-1/5	-6/5	4/5
y_2	1/5	-4/5	31/5
z	-4/5	51/5	16/5

Ausführen bis alle Elemente in der Zeile ohne die [1] Spalte kleiner als 0 sind

3. Folgen

3.1 Allgemein

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$	Eine Folge ist eine Anordnung von unendlichen vielen Elementen.
$(c_n) = (c_n)_n^\infty$	Zwei Folgen sind nur dann gleich wenn alle ihre Glieder übereinstimmen.

3.2 Rechenregeln

Addition:

$$(c_n) = (a_n) + (b_n)$$

$$c_k = a_k + b_k$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl

$$(c_n) = \lambda (a_n)$$

$$c_k = \lambda a_k$$

Recht schieben um *m* Stellen — Es werden 0-en voran geschoben.

$$(b_n) = (a_{n-m})$$

Links schieben um *m* Stellen: — Es werden die ersten m stellen gelöscht.

$$(b_n) = (a_{n+m})$$

3.2 Nullfolge(NF)

$$n = (0,0,0,0,\ldots,0)$$

oder

$$|a_k| < \varepsilon \quad , \forall\, k \geq n_0$$

Eine Nullfolge ist eine Folge deren Glieder alle Null sind oder **gegen Null streben**.
Eine Folge wird Nullfolge genannt, falls $\forall\, \varepsilon > 0$ ein $n0 \in IN$ existiert

Verschiedene Nullfolgen

$\frac{1}{k}$	*HARMONISCHE FOLGE*
q^k für $k > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\lvert q \rvert)}$	Jede Geometrische Folge für Iql < 1
$\frac{k}{k^2 - 1}$	

Grundsatz

Es kann gesagt werden, dass eine Folgen die kleiner oder gleich einer Nullfolge ist, auch Nullfolgen ist.

3.3 Alternierende Folge

$$(a_n) = (1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,\ldots)$$

Eine Alternierendefolge ist eine Folge bei der aufeinaderfolgende Glieder unterschiedliche Vorzeichen haben.

3.4 Differenzfolge

$$b_k = a_{k+1} - a_k \qquad \text{(k=1,2,3,...)}$$

BSP:
Gegebene Folge
$(a_k) = (1,4,9,25,36,49,\ldots)$
1.Differenzfolge
$(b_k) = (3,5,7,9,11,13,\ldots)$

3.5 Arithmetische Folgen (AF)

$$a_k = a_1 + (k-1)d \qquad \text{(k=1,2,3,...)}$$

d: Differenz zum nächsten Glied

$$d = \frac{a_k - a_i}{k - i}$$

$$a_1 = a_k - (k-1)d$$

Die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder $a_{k+1} - a_k$ ist bei arithmetischen Folgen konstant, dh. unabhängig von k

BSP: $(a_k) = (1,3,5,7,9,11,13,\ldots)$ ist eine arithmetische Folge.

3.5.1 Summe einer AF

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\frac{a_n + a_1}{2}\right) n$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\left(a_1 + \frac{d(n-1)}{2}\right)$$

Spezialfälle:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n\left(\frac{1}{6} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{3}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

3.5.2 Aritmetische Folgen höherer Ordnung

BSP:

Gegebene Folge $n^2 = (1,4,9,25,36,49,\ldots)$

1.Differenzfolge $= (3,5,7,9,11,13,\ldots)$

2.Differenzfolge $= (2,2,2,2,2,2,2,\ldots)$

Die zweite Differenzfolge ist eine Konstantefolge !
Man sagt dann (n^2) ist eine AF 2. Ordnung

3.6 Geometrische Folgen (GF)

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$	Eine Folge bei der die Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich gross sind, d.h. konstant.
$a_k = a_1 q^{k-1}$ (k=1,2,3,...)	
$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ (k=1,2,3,...)	q: quotient zweier aufeinander folgende Glieder <u>=konst</u>

3.6.1 Summer einer GF

Definition

$$s = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots\ldots + a_1 q^{n-1}$$

Die Summe der Glieder einer <u>endlichen</u> GF

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

Die Summe der Glieder einer <u>unendlichen</u> GF

Für $n \to \infty$ und $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

3.7 Zinsrechnen

Zinseszinsrechnung

$$K_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n K_0$$

K_n	=Kapital nach n Jahren
p	=Prozentsatz
K_0	=Anfangskapital

Für Stetige verzinsung nach n Jahren gilt

$$K_n = e^{\left(\frac{n \cdot p}{100}\right)} \cdot K_0$$

Nachschüssige Einzahlungen

$$K_n = q^n K_0 + R \sum_{k=1}^{n-1} q^k$$

$$K_n = q^n K_0 + R \frac{1-q^n}{1-q}$$

R=	Nachrate (Sie wird am ende einer Zinsperiode einbezahlt)
q=	Quotent der GF (q=1+p)

(n=0,1,2,3,4...)

Vorschüssige Einzahlung

$$K_n = q^n K_0 + R \frac{q(1-q^n)}{1-q}$$

4. Reihen

4.1 Unendliche Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$	Das Problem ist wie addiert man unendlich viele Glieder?
Für die Summe $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gilt dann $\lim_{n\to\infty} S_n = S$	Man Betrachtet eine Teilsumme und prüft ob diese gegen ein bestimmten wert strebt.(konvergiert)

Satz

Die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$	konvergiert.
Die Reihe $\sum \frac{1}{k}$	divergiert
Die Reihe $\sum \frac{1}{k^{1+e}}$	konvergiert für alle e>0

4.1.1 Konvergenz Kriterien

1. Konvergenztest Die Reihe divergiert wenn $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ S= $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	Falls $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ kann die Reihe divergieren oder Konvergieren.
2. Quotientenkriterium $\sum a_k$ eine Reihe mit pos. Gliedern $\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$	Geeignet wenn a_k Fakultät von k oder k-te Potenz enthält. konvergiert für $\delta < 1$ divergiert für $\delta > 1$
3. Wurzelkriterium $\sum a_k$ eine Reihe mit pos. Gliedern $\delta = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$	Geeignet wenn a_k k-te Potenz enthält. konvergiert für $\delta < 0$ divergiert für $\delta > 1$
4. Majoranten und Minoranten Krieterium Falls $\sum a_k$ und $\sum b_k$ zwei Reihen mit pos. Gilt $a_k \leq b_k, \forall k$ konvergiert $\sum b_k$ => konvergiert $\sum a_k$. divergiert $\sum a_k$ => divergiert $\sum b_k$.	Beide Reihen dürfen nur positive Glieder aufweisen. Dieser Test bedarf einer gewissen erfahrung und sollte deshalb erst am schluss angewendet werden.
5. Leibniz-Kriterium Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \quad (a_k > 0 \; \forall k)$ konvergiert wenn: 1.) (a_k) monoton fallend ist 2.) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (NF) ist.	Kann für alternierende Reihen verwendet werden.

5. Potenzreihen

5.1 Definition

Eine Potenzreihe in Potenzen von $(x - x_0)$ ist ein Reihe der Form:

STÖCKER p.511,513

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

a_k: Koeffizienten
x_0: Zentrum oder Entwicklungspunkt
x: Variablen

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k$$

Will man ein Potenzreihe untersuchen dann empfiehlt es sich , die Partialsumme zu untersuchen zu betrachten (Summe der Erstenglieder): (Siehe unter anderem auch in 4.)

5.1.1 Konvergenzradius

Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$

Für jede Potenzreihe in $(x - x_0)$ gibt es eine reelle Zahl $R \geq 0$, genannt Konvergenzradius so, dass die Potenzreihe:

$\lvert x - x_0 \rvert < R$	Konvergiert
$\lvert x - x_0 \rvert > R$	Divergiert
$\lvert x - x_0 \rvert = R$	Konvergieren oder Divergieren Es sind weitere Untersuchungen nötig

Quotienten Kriterium

Der Konvergenzradius falls der Grenzwert existiert

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

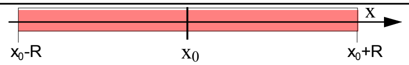
Wurzelkriterium

bezw. dieser Grenzwert existiert

$$R = \left(\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\lvert a_k \rvert} \right)^{-1}$$

5.1.2 Konvergenzbereich

$$(x_0 - R, x_0 + R)$$



Menge aller $x \in$ R(oder C) für die die Reihe konvergiert

5.2 Approximation von Funktionen

Ziel ist es eine gegebene Funktion f(x) in der Umgebung eines **Punktes a** durch ein Polynom
$P_n(x)$ n-ten Grades zu approximieren.

5.2.1 MacLaurin Polynom (punkt a=0)

Das n-te MacLaurin Polynom lautet

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Für den Fehler siehe 5.2.3

Es soll gelten:

$$f(0) = P_n(0)$$
$$f'(0) = P_n'(0)$$
$$f''(0) = P_n''(0)$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$f(0)^{(k)} = P_n^{(k)}(0)$$

Lösungsansätze ohne die Ableitungen zu berechnen.

- Parzialbruchzerlegung 8.1
- Summe einer unendlichen Geometrischen Folge 3.6.1

5.2.2 Taylor Polynom (punkt a!=0)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Das Taylor Polynom n-ten Grades einer Funktion f(x) an der stelle a.

5.2.3 Restglied nach Lagrange

Fehler an der Stelle x

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

oder

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Falls die Funktion in einer Umgebung der Stelle x=a und n+1 mal differenzierbar ist und dasTaylor-Polynom von f an dieser Stelle ist

wobei c zwischen x und a liegt.

5.2.4 Binominialreihe

$$(1 + x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für } (-1 < x < 1)$$

oder

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha(n - 1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

x kann substituiert werden. dh. vor x kann ein Faktor stehen.

5.3 Approximationspolynom nach Newton

Lineare Interpolation

$$P_1(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot y[x_0, x_1] \qquad y_n = y[x_n]$$

$$y[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Quadratische Interpolation

$$P_2(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot y[x_0, x_1, x_2]$$

$$y[x_0, x_1, x_2] = \frac{y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Approximation höhere Ordnung

$$y[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{y[x_1, x_2, \ldots, x_k] - y[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

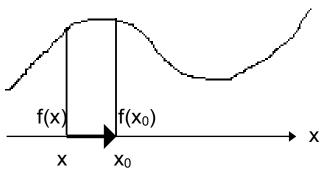
6. Differentialrechnen

6.1 Grenzwerte

Linksseitiger Grenzwert

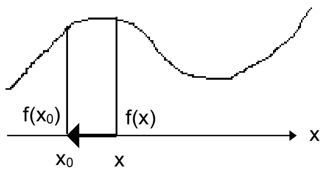
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$$

x<x₀



Rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$



6.1.1 Rationale Funktion

Definition

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_1 x + b_0}$$

$a_k, b_k \in R$ und $b_m \neq 0$, $a_n \neq 0$

Die Pole einer Rationalenfunktion

Die Rationale Funktion r(x) hat an der Stelle x_0 einen Pol k-ter Ordnung falls x_0 eine k-fache Nullstelle des Nennerpolynoms hat.

6.1.2 Regeln

Summation $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$	Wenn der Grenzwert von g und f existiert
Multiplikation $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$	Wenn der Grenzwert von g und f existiert
Division $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$	Falls lim g(x) != 0
Multiplikation mit einer Konstanten $\lim[c \cdot f(x)] = c \lim f(x)$	c eine Reele Zahl
Wurzel $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$	f(x) > 0

6.1.3 Stetige Funktionen

Definition

Man nennt eine Funktion f stetig im Punkt c, falls gilt

- Man kann ihren Graphen ohne abzusetzen zeichnen.
- f(c) ist definiert
- $\lim_{x \to c} f(c)$ existiert
- $\lim_{x \to c} f(c) = f(c)$

Eine Funktion, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist, nennt man eine stetige Funktion.

- Polynome
- Sinus,Cosinus,hyperbolikusfunktion
- Exponentialfunktion $y = e^x$, Logarithmus

6.1.4 Funktion bleiben unter folgenden Regeln stetig

Summation $f \pm g$	Sind f und g stetig (in C)
Multiplikation $f \cdot g$	Sind f und g stetig (in C)
Division $\frac{f}{g}$	Sind f und g stetig (in C) und g nicht 0

6.1.5 Hilfsfunktionen zum berechnen trigonometrischer Grenzwerte

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\sin(x) \approx x$$

Nur für sehr kleine x $(x \approx 0)$

6.2 Differential

Definition

Berechnung der Steigung einer beliebigen Funktion im Punkte x

Differenzenquotienten von f an der Stelle x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Steigung der Sekante

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

6.3 Ableitung im Punkte x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Unter der Ableitung (Differentialquotient) der funktion f im Punkt x versteht man diesen Grenzwert

$$= f''(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

oder

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Rechtsseitige Ableitung

$$f'(x^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Linksseitige Ableitung

$$f'(x^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

6.3.1 Ableitung Elementarer Funktionen sofern g'(x) und f'(x) existiert

Ableitung von x^n $(n \in R)$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left[\frac{1}{a+bx}\right]' = \frac{-b}{(a+bx)^2} \qquad \left[\frac{1}{(a+bx)^n}\right]' = n\frac{-b}{(a+bx)^{n+1}}$$

$$\left[\frac{1}{a-bx}\right]' = \frac{b}{(a+bx)^2} \qquad \left[\frac{1}{(a+bx)^n}\right]' = n\frac{b}{(a+bx)^{n+1}}$$

Ableitung von $c\,f(x)$

$$[c\,f(x)]' = c\,f(x) \quad (c \in R)$$

Ableitung von $\alpha\, f(x) + \beta\, g(x) \quad (\alpha, \beta \in R)$

$$[\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]' = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x)$$

Ableitung von $f(x) + g(x)$ — Summenregel

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Ableitung von $f(x) \cdot g(x)$ — Produktregel

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Ableitung von $\frac{f(x)}{g(x)}$ — Divisionsregel

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f(x)' \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)'}{[g(x)]^2}$$

Ableitung von Polynomen

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$\Rightarrow P(x)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

Kettenregel — Anwendung bei komplizierten Ausdrücken hilfreich

$$[f(\,g(x)\,)]' = f'(\,g(x)\,) \cdot g'(x)$$

Ableitung der trigonometrischen Funktionen

$$\tfrac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$\tfrac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$\tfrac{d}{dx}[\tan x] = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\tfrac{d}{dx}[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6.3.2 Ableitung der zyklonischen Funktionen

$\left[\arcsin(x)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**Definitionsbereich**	**[-1,1]**
$\left[\arccos(x)\right]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**Definitionsbereich**	**[-∞,∞]**
$\left[\arctan(x)\right]' = \dfrac{1}{1+x^2}$	**Definitionsbereich**	**[-∞,∞]**
$\left[\operatorname{arccot}(x)\right]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	**Definitionsbereich [-∞,∞]**	

6.3.3 Ableitung der Logarithmusfunktion

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Spezialfall:

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

6.3.4 Ableitung Exponentialfunktion

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \cdot \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\alpha x}\right] = \alpha\, e^{\alpha x}$$

Spezialfall:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

6.3.5 Ableitung des Betrags

$$\frac{d}{dx}\left[|x|\right] = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$

6.3.6 Ableitung der hyperbolischen Funktionen

$$\frac{d}{dx}\left[\sinh(x)\right] = \cosh(x)$$

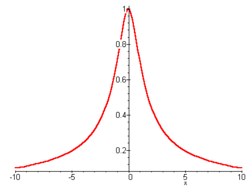
$$\frac{d}{dx}\left[\cosh(x)\right] = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tanh(x)\right] = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

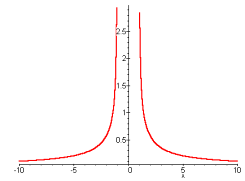
$$\frac{d}{dx}\left[\coth(x)\right] = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$

6.3.7 Ableitung der Areafunktionen

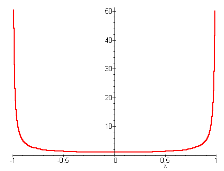
$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arsinh}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$



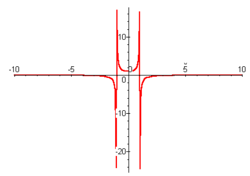
$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcosh}(x)\right] = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$



$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{artanh}(x)\right] = \frac{1}{1-x^2} \quad, |x| < 1$$



$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcoth}(x)\right] = \frac{1}{1-x^2} \quad, |x| > 1$$



6.4 Implizites Differenzieren

Die Funktion ist in Impliziterform gegeben

$$f(x,y) = 0$$

Vielfach ist es möglich diese nach y' aufzulösen aber nicht immer.
zb. Kreis, Ellipse.

$$7y^4 + x^3y + x = 4$$

Es wird dabei y=f(x) angenommen damit ergibt sich

$$7\cdot f(x)^4 + x^3\cdot f(x) + x = 4$$

Diese kann man nun auf beiden Seiten differenzieren

$$\frac{d}{dx}7\cdot f(x)^4 + x^3\cdot f(x) + x = \frac{d}{dx}4$$

Dabei erhält man

$$28[y(x)]^3\cdot y'(x) + 3x^2\cdot y(x) + x^3\cdot y'(x) + 1 = 0$$

Nun setzt man für y(x)=y und für y'(x)=y' ein und löst diese nach y' auf

$$y' = -\frac{1+3x^2y}{28y^3+x^3}$$

y hängt nun von x,y ab. Setzt man nun einen Punkt, der auf der Kurve liegt ein erhält man die Steigung y'

6.5 Ableitung höhere Ordnung

Mehrfaches Ableiten einer Funktion.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}f\right] = \frac{d^2}{dx^2}f = f''$$

6.6 Logarithmisches Ableiten einer Funktion f(x)

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(f(x))\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Eine weiter möglichkeit eine Funktion Abzuleiten ist diese Logaritmisch abzuleiten. Es gilt:

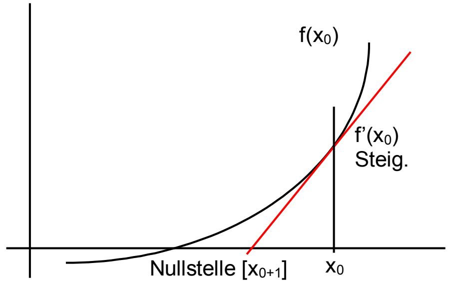
Oder

$$f'(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[\ln(f(x))\right]$$

6.7 Das Newton verfahren mittels differentieren

Für jeden Iterationsschritt gilt:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$



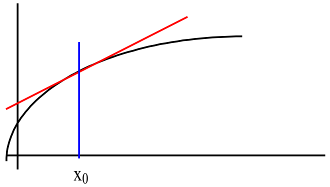
6.8 Das Differential

6.8.1 Linearisieren einer Funktion

Linearisieren einer Funktion bedeutet das „ersetzen einer Fkt. durch eine möglichst gute lineare Fkt. in der Umgebung von x_0

In der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

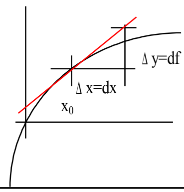


6.8.2 Definition des Differentials

$$df = f'(x_0)dx$$

$$dx = \Delta x$$

$$dy \approx \Delta y \quad \text{fuer kleine dx}$$



6.9 Regel von Bernulli d'Hospital

Grenzwert

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \operatorname{Lim}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$$

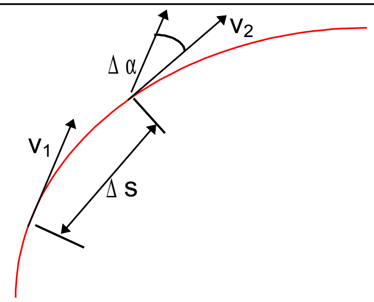
Für Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

Wenn der Grenzwert bei der ersten Ableitung nicht existiert dann gegeben falls *mehrmals* ableiten

6.10 Krümmung von Kurven

Allgemein

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$



Krümmung einer Funktion f(x)

$$\kappa(x_0) = \frac{f''(x_0)}{(1+[f'(x_0)]^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Krümmungsradius

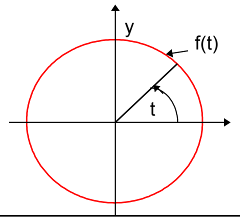
$$R = \left|\frac{1}{\kappa(x_0)}\right|$$

Krümmung in Parameterform

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Mittelpunkt des Krümmungskreises

- In koordinaten Darstellung

$$x_m(t) = x(t) - \frac{\dot{y}(t)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$y_m(t) = y(t) + \frac{\dot{x}(t)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

- In Parameter Darstellung
  x(t)=t
  y(t)=f(t)

Evolute(Siehe Stöcker)
Die Kurve aller Krümmungsmittelpunkte der ursprünglichen Kurve.

Evolvente
Die ursprüngliche Kurve

6.11 Kurvendiskusion

Ziel:
Wesentliche Eigenschaften einer gegebenen Funktion qualitativ ermitteln damit zb. der Graph gezeichnet werden kann.

Vorgehen:

- **Definitions und Wertebereich**

- **Symetrie / Periodizität**
  f ist **gerade** wenn f(-x)=f(x)
  f ist **ungerade** wenn f(-x)=-f(x)
  f ist **periodisch** wenn f(x+T)=f(x)
  <u>für alle x aus D(f)</u>

- **Stetigkeit / Unstetigkeitsstellen**
  In welchen Intervallen ist f(x) stetig?
  Wo hat f(x) Pole,Lücken, Sprungstellen?

- **Nullstellen**

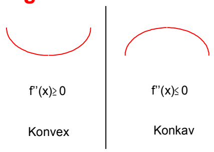
- **Asymtotisches verhalten**
  Für $x \to \pm\infty$
  Für $f(x) \to \pm\infty$

- **Extremalstellen(lokale / Globale)**

- **Wendepunkte**

- **Monotonie verhalten**
  f ist monoton **wachsend** falls **f'(x)>0** und <u>fallend</u> falls <u>f'(x)<0</u> im betrachteten Interval

- **Krümungsverhalten**

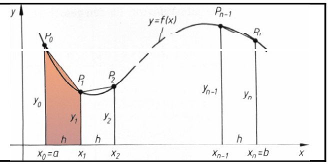


7.10 Numerische Integration

7.10.1 Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad y_k = f(x_k) \quad k = 1,2,\ldots$$



7.10.2 Fehlerabschätzen bei der Trapezregel

$$|\varepsilon_T| \le \frac{(b-a)^3 k}{12n^2}$$

Falls f '' steig ist in [a,b] und

$$k = \max|f''(x)| \qquad x \in [a,b]$$

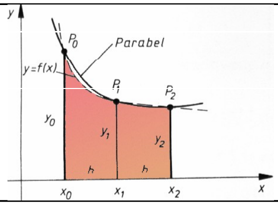
7.10.3 Simpsonregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad y_k = f(x_k) \quad k = 1,2,\ldots$$

n: muss gerade sein.

Die Simpsonregel ist genau bis und mit 3- Grades



7.10.4 Fehlerabschätzen bei der Simponregel

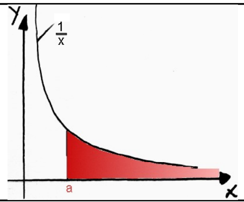
$$|\varepsilon_S| \le \frac{(b-a)^5 k}{180n^4}$$

Falls $f^{(4)}$ stetig ist in [b,a] und

$$k = \max|f^{(4)}(x)| \qquad (x = [b,a])$$

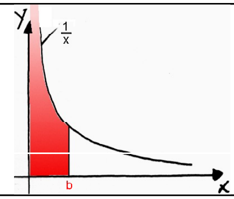
7.11 Uneingentliche Integrale 1.Art (Stöcker P.524ff)

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx$$



7.11.1 Uneigentliche Integrale 2. Art

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{R\to a+}\int_R^b f(x)dx$$

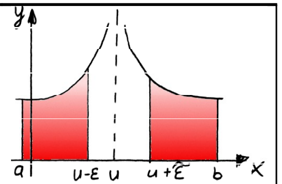


7.11.2 Uneigentliche Integrale mit einem pol

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{u-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0}\int_{u+\tilde{\varepsilon}}^b f(x)dx$$

Louch-Hauptwert

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{u-\varepsilon} f(x)dx + \int_{u+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$



7.12 Gammafunktion

Definition

$$T(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-n} dx \quad (n \in R+)$$

Die Gammefunktion ist eine erweiterung der **Fakultät**

$$T(n+1) = n!$$

Stirling-Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Gilt nur für sehr grosses n.

7.13 Laplacetransformation

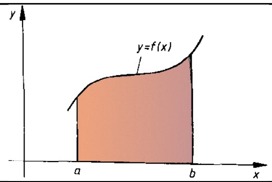
$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Siehe dazu in Kapitel 16. weiter vorne

7.14 Flächen unter Kurven

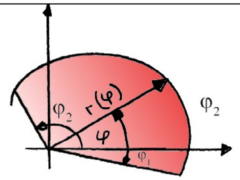
7.14.1 Fläche unter einer Kurve

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



7.14.2 Flächen in Polarkoordinaten

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \left[r(\varphi)\right]^2 d\varphi$$

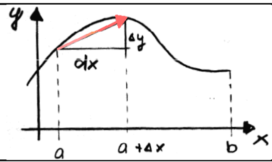


7.14.2.1 Leibz'sche Sektorformel

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} \left(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\right)dt$$

7.14.3 Länge einer Kurve

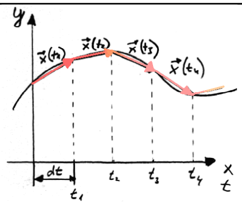
$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$



7.14.4 Länge einer Kurve aus Parameterdarstellung

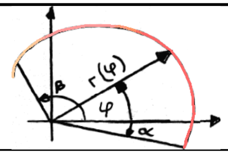
$$L_\gamma = \int_a^b \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|dt$$

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{\left[\dot{x}(t)\right]^2 + \left[\dot{y}(t)\right]^2}\,dt$$



7.14.5 Länge einer Kurve aus polarkoordinaten

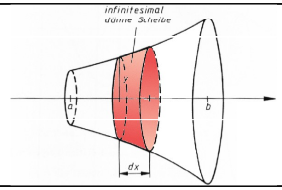
$$L_\gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2 + \left[\dot{r}(\varphi)\right]^2}\,d\varphi$$



7.15 Rotationskörpern

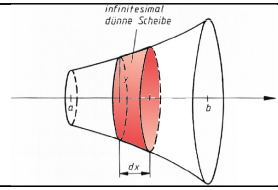
7.15.1 Volumen von Rotationskörpern

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$



7.15.2 Oberfläche von Rotationskörpern

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx$$



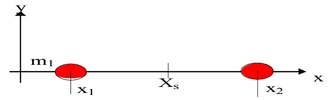
7.15.3 Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Für zwei Massen

$$x_s = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1x_1 + m_2x_2\right)$$

Als Vektor

$$\vec{x}_s = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2\right)$$



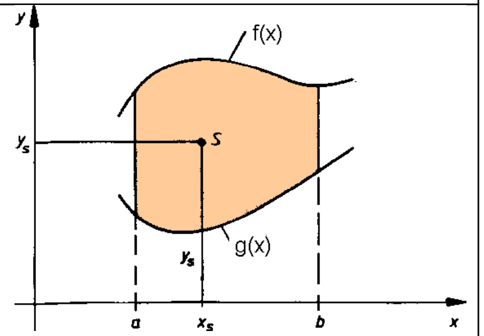
Allgemein

$$\vec{x}_s = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{x}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Schwerpunkt einer Fläche

$$x_s = \frac{\int_a^b x\cdot\left[f(x) - g(x)\right]dx}{\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx}$$

$$y_s = \frac{\int_a^b \left[\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right]dx}{2\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx}$$



Schwerpunkt eines Rotationskörpers

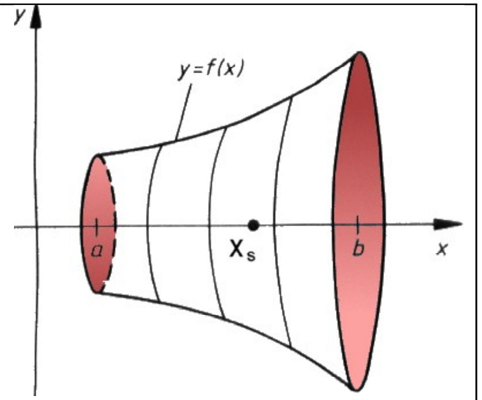
$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot [f(x)]^2 \, dx}{\int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

Bei einer diskreten Massenverteilung

$$\vec{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

im Grenzfall

$$x_s = \frac{\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \cdot x \, dx}{\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2 \, dx}$$



7.15.4 Trägheitsmoment (Stöcker S.554)

Allgemein

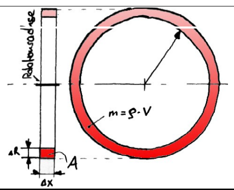
$$E_{Kin} = \tfrac{1}{2} m v^2$$

$$E_{Kin} = \tfrac{1}{2} J \omega^2$$

$$J = \sum_i R_i^2 \Delta m_i$$

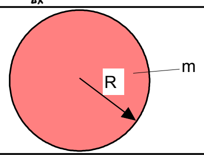
Trägheitsmoment eines Kreisringes

$$J_{Kreisring} = 2\pi R^3 \rho_0 A = R^2 m$$



Trägheitsmoment einer Kreisscheibe

$$J_{Kreisscheibe} = \tfrac{1}{2} R^2 m$$



8. Partialbruch zerlegung (PBZ)

8.1 Vorbereitung (Polynom Division)

$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ P(x),Q(x) Polynome

Ausdruck $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ist keine echt gebrochene Zahl. Dh. Grad(P(x)) > Grad(Q(x)),

P(x) : Q(X) = $\underbrace{N(x)}_{Polynom} + \underbrace{\frac{Zähler(x)}{Nenner(x)}}_{Echtgebrochen}$ Dies wird durch Polynom division erreicht.

8.1.1 Mit HP (Polynom Division)

Programm

HOME\ALGE\POLY\PDIV

Parameter:

{ Faktoren P(x) } = {... p_3 p_2 p_1} Achtung: $0x^n$ nicht vergessen

{ Faktoren Q(x) }= {... q_3 q_2 q_1 }

Resultat:

{ Faktoren neues Polynom N(x) }

{ Rest Polynom Zähler(x) }

{ Rest Polynom Nenner(x) }

=> $N(x) + \frac{Zähler(x)}{Nenner(x)}$

Das Polynom N(x) kann problemlos integriert werden. Für den Restbruch verwende nun PBZ.

8.2 Parzialbruchzerlegung

Beschreibung im Stöcker 206,207

8.2.1 Parzialbruchzerlegung mit dem HP

Programm:

HOME\ALGE\POLY\PBZL

Parameter im Menü :

{ Faktoren Zähler(x) }= { ... $Zähler_2$ $Zähler_1$ }

{ Faktoren Nenner(x) }

Resultat:

Lesen mit HOME\ALGE\POLY\LESE

Liste aus Summen

{ A_1 { ... a_{13} a_{12} a_{11} } p_1 }

{ A_2 { ... a_{23} a_{21} a_{21} } p_2 }

{..{...}...}

Bedeutung:

$$\frac{Zähler(x)}{Nenner(x)} = \frac{A_1}{\left(...+ a_{13}x^2 + a_{12}x + a_{11}\right)^{p_1}} + \frac{A_2}{\left(...+ a_{23}x^2 + a_{22}x + a_{21}\right)^{p_2}} + \frac{...}{...}$$

9. Partielle Differentation

9.1 Schreibformen von Funktionen

$z = f(x,y)$	Explizite Schreibform
$z - f(x,y) = 0$	Implizite Schreibform

9.2 Grenzwert

$$L = \lim_{\substack{\gamma \\ (x,y)\to(x_0,y_0)}} f(x,y)$$

Dies muss für alle Kurven durch (x_0,y_0) gelten.

9.3 Richtungsableitung

$$D_{\vec e}\, f(\vec x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\vec x_0 + t\vec e) - f(\vec x_0)}{t}$$

Ableitung in eine bestimmte Richtung $\vec e$.

Der $\vec e$ Vektor hat die länge 1.

oder

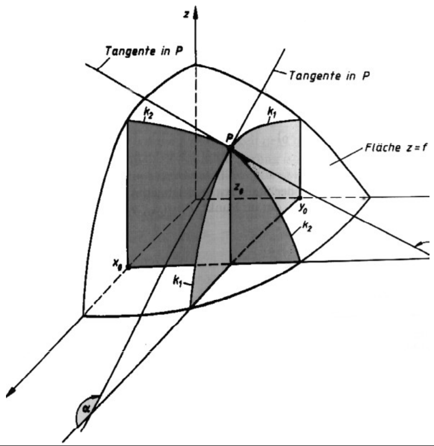
$$D_{\vec e}\, f(\vec x_0) = \vec\nabla f(\vec x_0) \bullet \vec e$$

9.4 Partielle Ableitung

Bei der partiellen Ableitung wird nach allen k variablen abgeleitet. Die nicht verwendeten Variablen, bei jener Ableitung, werden als konstant betrachtet.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{x_k} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x, \ldots, x_n + \Delta x) - f(x_1, \ldots x_n)}{\Delta x}$$

Das ∂ Zeichen steht für partielle Ableitung.



9.5 Differenzierbarkeit

Eine Funktion $y = f(\vec x)$ ist differenzierbar in x_0 falls:

- $\vec\nabla f(\vec x)$ existiert
- f lässt sich in der Umgebung $\vec x_0$ linearisieren

9.6 Gradienten

Der Gradient ist ein Vektor.

$$\nabla f(\vec x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_0) \\ f_{x_2}(x_0) \\ \ldots\ldots \\ f_{x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec x_0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\vec x_0} \\ \ldots\ldots \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec x_0} \end{pmatrix}$$

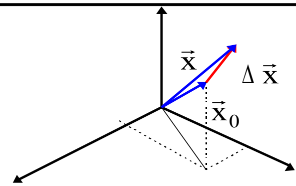
- Der Gradient zeigt immer in die Richtung mit der grössten Steigung.
- Der Gradient steht senkrecht auf der Niveau Linie.
- Der Gradient steht bei 3 Parametern senkrecht auf der Tangentialebene.
- Verschwindet der Gradient so ist dieser Punkt ein Extrema.

9.7 Linearisierung

Im punkt x_0 kann die Kurve ein stückweit durch ein Gerade ersetzt werden.

$$f(\vec x) = f(\vec x_0) + f(\vec x_0)(\vec x - \vec x_0) + \underset{\vec x\to\vec x_0}{o}(|\vec x - \vec x_0|)$$

o: klein Lamdau (nur eine Hilfsvariable)



9.8 Extrema

Siehe Stöcker

9.8.1 Extrema mit Nebenbedingung, Prinzipal - Funktion

Für **eine Nebenbedingung** g(x,y):

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

für die obige Gleichung muss gelten

$$\nabla\Phi = \vec 0$$

und die Funktion g muss als

$$g(x,y) = 0$$

gegeben sein.

Der Lagrange Multiplikator(en) verschwinded am ende wieder.

Für **beliebige Nebenbedingungen** g_k(x,y):

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = f(x_1,\ldots,x_n) + \lambda_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda_n(x_1,\ldots,x_n)$$

bedingungen wie links.

9.9 Kettenregel

z = f(x;y) sei eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen x und y, diese wiederum sind von einem Parameter t abhängig: **x = x(t), y = y(t)** Dann ist die durch Einsetzen dieser Parameter-Gleichung in die Funktionsgleichung z = f(x;y) erhaltene Funktion **z = f(x(t) ; y(t)) = F(t)** eine zusammengesetzte, verkettete Funktion dieses Parameters, deren Ableitung nach folgenden Kettenregel gebildet wird: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$	Allgemein $\frac{df}{dt} = \vec{\nabla} f\left(\vec{x}(t)\right) \bullet \dot{\vec{x}}(t)$

9.10 Totale Differential

Dies ist die Änderung von f wenn sich die Argumente x_k (k=0,1,...,n) nur kleine grössen dx_k k=0,1,...,n) ändern.

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f \cdot dx_k}{\partial x_k}$$

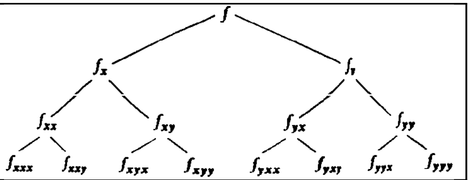
9.11 Ableitung höherer Ordnung

Satz von Schwarz
Existieren die partiellen Ableitungen

f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}

und sind stetig, so gilt

$f_{xy} = f_{yx}$



9.12 Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.12.1 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

DG 1 Ordnung gegeben

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \cdot g(y) \quad (\text{ g(y) != 0 })$$

kann duch umformen in (trennen der Variablen nach links und rechts)

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

umgeformt werden. Daraus erhält man.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

10. Komplexe Zahlen

Beim HP48GX als (x,y) oder (x y) eingeben.

Allgemein

$j = \sqrt{-1} \quad \Leftrightarrow \quad j^2 = -1 \quad (-j)^2 = 1$

Kartesischen Koordinaten

$$z = x + yj$$

Polarkoordinaten

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

$r = |x + jy| \qquad |e^{j\varphi}| = 1$

$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

Addition

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 j) + (x_2 + y_2 j) = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) j$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 j)}{(x_2 + y_2 j)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 j)(x_2 - y_2 j)}{(x_2 + y_2 j)(x_2 - y_2 j)} = \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 j + x_2 y_1 j + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + x_1 y_2 j + x_2 y_1 j - y_1 y_2$$

Potenzieren

$$z^n = \left[r \cdot e^{j\varphi} \right]^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}$$

Logarithmus für $z = r \cdot e^{j(\varphi + k \cdot 2\pi)}$ gilt: $(0 \le \varphi < 2\pi \;,\; k \in Z)$

$$\ln(z) = \ln(r) + j(\varphi + k \cdot 2\pi)$$

k = ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ...
somit unendlich viel Lösungen

Konjugiertkomplex $\bar{z}$ oder z^*

Wenn $z = a + bj$

so ist $\bar{z} = a - bj$

Mit HP [MATH][CMPL][CONJ]

$(\bar{z})^n = \overline{z^n}$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$

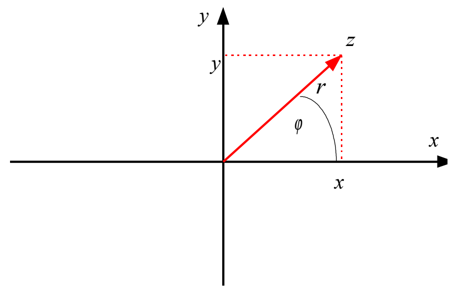
$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$

Zeiger $\underline{z}$

Wird ein komplexe zahl als $\underline{z}$ geschrieben so ist sie als Zeiger gemeint.

Polarekoordinaten r,φ

$z = r \cdot cis(\varphi)$ oder $z = r \cdot \boldsymbol{e}^{j\varphi}$



Nach Euler

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + \boldsymbol{j}\sin(\varphi), \forall \varphi$$

Hilfreich:

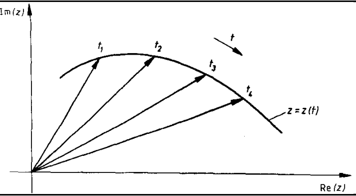
$$\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$$

Tabelle von j^x

$j^0 = 1$
$j^1 = j$
$j^2 = -1$
$j^3 = -j$
$j^4 = 1$
$j^5 = j$
$j^6 = -1$
$j^7 = -j$

Ortskurven

$$\underline{z} = \underline{z}(t) = x(t) + j \cdot y(t)$$



Inversion der Ortskurve (Inversion einer komplexen Zahl in der komplexen Ebene)

Hinweis:

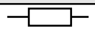
1. Der Punkt mit dem kleinsten Abstand (Betrag) vom Nullpunkt führt zu dem Bildpunkt mit dem grössten Abstand (Betrag) und umgekehrt.
2. Ein Punkt oberhalb der reellen Achse führt zu einem Bildpunkt unterhalb der reellen Achse und umgekehrt

$$\underline{w} = \frac{1}{\underline{z}}$$

Inversionsregel: Geraden und Kreise werden durch die Inversion $\underline{w} = 1/\underline{z}$ nach folgenden Regeln abgebildet:

z-Ebene	w-Ebene
Gerade durch den Nullpunkt	Gerade durch den Nullpunkt
Gerade die nicht durch den Nullpunkt verläuft	Kreis durch den Nullpunkt
Mittelpunktskreis	Mittelpunktskreis
Kreis duch den Nullpunkt	Gerade die nicht durch den Nullpunkt verläuft
Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft	Kreis, der nicht durch den Nullpunkt verläuft

Berechnung eines Wechselstromkreises mit Hilfe von Widerstands und Leitwertoperatoren

Schaltelement	Symbol	Widerstandsoperator	Leitwertoperator
Ohmscher Widerstand		R	$\frac{1}{R}$
Kapazität C		$-j\frac{1}{\omega C}$	$j\omega C$
Induktivität L		$j\omega L$	$-j\frac{1}{\omega L}$

Impedanz Z=R+jX (Widerstand)	Admidanz Y=1/Z (Widerstand)

11. Differentialgleichungen

11.1 Separierbare Differentialgleichung

Typische Form	Bemerkungen:
$y' = g(x) \cdot h(y)$ $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$	g : hängt nur von x ab h : hängt nur von y ab
Die Lösung erhält man durch Separieren $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$	Als erster Schritt müssen die Variablen Separierte werden. d.h alle x auf eine Seite und alle y auf die andere.
und Integrieren $\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C$	C :Integrationskonstante Siehe auch Stöcker p.609

11.2 Substitution zB. mit y=v·x

Gegebene Form	Bemerkung:
$y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$	***h*** und ***g*** sind homogene Funktionen gleichen Grades Eine Funktion ist homogen wenn gilt. $f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$
Substitution durch $y = v \cdot x$ und die Ableitung davon $y' = v' \cdot x + v = \frac{dv}{dx} x + v$	
Für die Rechte Seite erhält man $\frac{g(x,y)}{h(x,y)} = \frac{g(x, v \cdot x)}{h(x, v \cdot x)} = \frac{x^n g(1,v)}{x^n h(1,v)}$ $= \frac{g(1,v)}{h(1,v)}$	Durch die Substitution wird führt man die Homogene DG in eine Separierbare über. Siehe auch Stöcker p.609
Somit: $\frac{dv}{dx} x + v = \frac{g(1,v)}{h(1,v)}$ Nach dem Auflösen nach v und x muss man noch Rücksubstituieren.	

11.3 Exakte Differentialgleichung

Typische Form	**Herausfinden ob Exakt:**
$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ oder $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$	$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ Möglicherweise mit einem *Integrierenden Faktor* M exakt machen. M=M(x) oder M(y). $M \cdot P dx + M \cdot Q dy = 0$ d.h. $\frac{\partial}{\partial y}(MP) = \frac{\partial}{\partial x}(MQ)$
Lösungsweg: **(1)** $F_x(x,y) = P(x,y)$ P Integrieren über x ergibt: **(2)** $F(x,y) = \int P(x,y)dx + \phi(y)$ Die Integrationskonstante ϕ(y) erhält man durch Integration von (3) **(3)** $\frac{d\phi}{dy} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx$	
Diese wird dann in (2) eingesetzt und man erhält dann (4) Die Lösungsform ist **(4)** $F(x,y) = C$	C : Integrationskonstante Siehe auch Stöcker p.609

11.4 Lineare Differentialgleichungen 1 Ordnung

Lineare DG 1. Ordnung Typische Form $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$ Sie ist **homogen** wenn $q(x) = 0$ Lösung: $y(x) = \frac{1}{\delta(x)}\left[\int p(x) \cdot q(x) dx + c\right]$ $\delta(x) = e^{\int p(x)dx}$	• ***p*** und ***q*** sind nur von x abhängig. • q wird Inhomogenität, Störung, oder quellterm genannt. Siehe auch Stöcker p.610

11.4.1 Methoden der „Variablen Konstanten"

1.Schritt Löse die Homogene DG: $y' + p(x) \cdot y = 0$ Diese ist separierbar. Allgem. Lösung: $y_h(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dc}$ **2.Schritt** Berechne eine partikuläre Lösung: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ in dem wir C=C(x) auffassen (variieren). Wir nehmen an: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ ***Einsetzen in DG*** $y'_p + p(x) \cdot y_p = q(x)$ Einsetzen und auflösen erhält man: $y_p(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right]$ **3. Schritt** Die allgem. Lösung ist nun: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$	Siehe auch Stöcker p.610

11.5 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Reduktion der Ordnung	**Bemerkung**
Aus $y'' = f(x, y, y')$ erhalten wir zwei DG 1. Ordnung $z = y'$ => y' = z $z' = y''$ $z' = f(x, y, z)$	Man kann jede DG höherer Ordnung in ein System vom DG 1. Ordnung überführen. Diese kann dann mit einer der bekannten Methoden gelöst werden.

11.6 Superpositionsprinzip

	Bemerkungen
Für homogene Lineare DG, beliebiger Ordnung, gilt: Sind y_1 und y_2 zwei Lösungen der DG, dann ist auch $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ eine Lösung der DG **Für inhomogene Lineare DG** $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$ gilt: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$	y_h: Allgem. Lösung der zugehörigen homogenen DG y_p: Partikulare Lösung. Kann oft erraten werden wegen Abhängigkeit von r(x)

11.7 Lineare DG mit konstanten Koeffizienten 2. Ordnung

Typische Form	Bemerkungen
$y''+ay'+by = r(x)$	$(a,b \in R)$
Lösungsweg in 4 Schritten	Siehe auch Stöcker p.612
1.Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen DG $y''+ay'+by = 0$	
Erstelle charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (Die Exponenten entsprechen dem Grad der Ableitung.)	
Lösungen aus der char. Gleichung:	
$\lambda_1=\lambda_2$: $y_h(x) = (C_1 + C_2)\cdot e^{\lambda x}$	C_1,C_2 nicht zusammenfassen!
$\lambda_1\neq\lambda_2$ ($\lambda\in R$): $y_h(x) = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$ (C_1,$C_2\in$R)	
$\lambda_{1,2}= -a/2\pm j\omega$: $y_h(x) = e^{-\frac{ax}{2}}\left(C_1\cdot e^{j\omega x} + C_2\cdot e^{-j\omega x}\right) = e^{-\frac{ax}{2}}A\cdot\cos(\omega t+\varphi)\quad (A,\varphi\in R) = e^{-\frac{ax}{2}}\left(\tilde{C}_1\cos(\omega x)+\tilde{C}_2\sin(\omega x)\right)$ Wobei $\omega = \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$	

2.Schritt

Berechnen einer Partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung:

1. Wähle unten, anhand von r(x) , den Ansatz. Wenn der **Ansatz bereits eine Lösung der homogenen DG ist**, verwende **Modifizierungsregel**.
2. Bestimme die Konstanten des Ansatzes,durch einsetzen in die DG.

$$y_p = \text{Ansatz}$$
$$y_p' = \ldots$$
$$..$$
$$y_p^{(n)} = \ldots$$

in DG einsetzen.

$$y_p''+a\cdot y_p'+b\cdot y_p = r$$

a,b sind die Koeffizienten der DG , r ist die Störung der DG

Danach bestimme C_n (ev. ω) durch koeffizientenvergleich. (Das linke muss das Rechte ergeben)

Ansatz:

Störung r(x) 'rechts der Gleichung'	**Ansatz für y_p**
$\left(k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots k_nx^n\right)e^{\gamma x}$	$\left(C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots C_nx^n\right)e^{\gamma\cdot x}$
$k\cdot x^n (n = 0,1,\ldots)$	$C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n$
$k\cos(\omega x)$ oder $k\sin(\omega x)$	$C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)$

Grundregel:	Falls r(x) eine der Funktionen in der linken Spalte der Tabelle ist, so verwendet man die entsprechende Funktion in der Rechten Spalte im Ansatz für die partikuläre Lösung y_p.
Modifizierungs-regel:	Die Grundregel wird modifiziert, falls ein Ansatz für y_p genommen werden müsste, der gleich einer der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung ist. In diesem Fall nehme man des x-fache des ersten Vorschlages, bzw. das x^2-fache, falls die charakteristische Gleichung eine reelle Doppellösung hat.
	Besteht die Störung aus einer Summe der Einträge in der linken Spalte, so verwende man im Ansatz für y_p die entsprechende Summe der Rechten Spalte.

3.Schritt:

Bestimme die allgemeine Lösung der DG.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

y_h enthält noch $C_1..C_n$

4.Schritt:

Bestimme eine Spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen.
y(x) aus Schritt 3 mehrmals ableiten. Dann x mit den Anfangsbedingungen setzen.
Dies für auf ein Gleichungssystem mit den Variablen $C_1...C_N$ nach den aufgelöst werden muss.

11.7.1 Lösen linearer DG's mit konstanten Koeffizienten höhere Ordnung

Gegeben DG folgender Form

$$y^{(r)} + a_{r-1}y^{(r-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

y=y(x)
a_x Koeffizienten
g(x) Störung

1. Lösung der homogenen Gleichung
Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots a_1\lambda + a_0 = 0$$

$\lambda=\lambda(x)$
a_x Koeffizienten
λ_k Nullstellen

mit den Nullstellen

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots\lambda_n$

Für die doppelten und vielfachen reelen Nullstellen gilt:

$$y_h(x) = (\underbrace{C_{10}}_{\text{1.Nullst.}} + \underbrace{C_{11}x}_{\text{dop.Nullst.}} + C_{12}x^2 + \underbrace{\ldots}_{\text{usw. fuer jede weitere vielfache nullstelle}})e^{\lambda_1 x} + \ldots$$

und für die Komplexen vielfachen Nullstellen gilt siehe Stöcker

2. Lösen der Inhomogenen Gleichung
Siehe weiter vorne

11.8 Wronski-Determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Die Wronski-Determinante ist ein Hilfsmittel. Mit ihr kann überprüft werden ob zwei Lösungen Linear unabhängig sind.
Zwei Lösungen einer DG sind dann lin. unabhängig wenn $W(x) \neq 0$ für wenigstens ein x.

11.9 Systeme von Differentialgleichungen

Aus einem System von zwei DG's 1. Ordnung erzeugt man eine DG 2. Ordnung.

BSP: **x=x(t) , y=y(t)**

$$x' - 3x + 2y = te^{3t} + 1$$
$$y' - x = 0$$

zwei DG 1. Ordnung

==>

$$x' - 3x + 2y = te^{3t} + 1$$

$$x' = y''$$
$$x = y'$$

x' und x in 1. Gleichung einsetzen

==>

$$y'' - 3y' + 2y = te^{3t} + 1$$

man erhält eine DG 2. Ordnung

Nun weiter wie in ***„Lineare DG mit konstanten Koeffizienten"*** beschrieben.

Lösungsform:

x(t) = ...
y(t) = ...

11.10 Lösen linearer DG's mit konstanten Koeffizienten höhere Ordnung

Gegeben DG folgender Form

$$y^{(r)} + a_{r-1}y^{(r-1)} + \ldots a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

y=y(x)
a_x Koeffizienten
g(x) Störung

1. Lösung der homogenen Gleichung
Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots a_1\lambda + a_0 = 0$$

$\lambda=\lambda(x)$
a_x Koeffizienten
λ_k Nullstellen

mit den Nullstellen

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots\lambda_n$

Für die doppelten und vielfachen reellen Nullstellen gilt:

$$y_h(x) = (\underbrace{C_{10}}_{\text{1.Nullst.}} + \underbrace{C_{11}x}_{\text{dop.Nullst.}} + C_{12}x^2 + \underbrace{\ldots}_{\text{usw. fuer jede weitere vielfache nullstelle}})e^{\lambda_1 x} + \ldots$$

und für die Komplexen vielfachen Nullstellen gilt

2. Lösen der Inhomogenen Gleichung
Siehe weiter vorne

11.11 Elektronische Schwingkreise

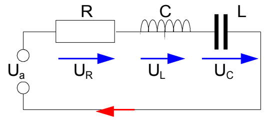
Spannungen:

$$U_L = L\frac{di}{dt}$$

$$U_R = R \cdot i$$

$$U_C = \frac{1}{C}Q$$

$$i = \frac{dQ}{dt}$$



$$U_a = L\dot{i} + R \cdot i + \frac{1}{C}Q$$

$$U_a = L\ddot{i} + R \cdot \dot{i} + \frac{1}{C}i = \frac{dU_a}{dt}$$

Q	: Ladung	[C]

15. Fourier reihen

15.1 T-Periodische Funktionen

Die Fourier reihe ist definiert

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega_0 x)+b_k\sin(k\omega_0 x)\right]$$

a_k, b_k sind die gesuchten Fourier Koeffizienten

Die Fourier koeffizenten a_k für k=0,1,2,3,....

$$a_k=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cdot\cos(k\omega_0 x)\,dx$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx$$

Die Fourier koeffizenten b_k für k=1,2,3,....

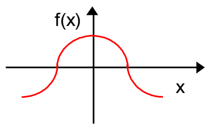
$$b_k=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cdot\sin(k\omega_0 x)\,dx$$

15.2 Spezielle Eigenschaften gerader und ungerader Funktionen

Gerade Funktion $f(-x)=f(x)$

Eine gerade Funktion enthält nur Cosinusanteile

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(k\omega_0 x)\right)$$

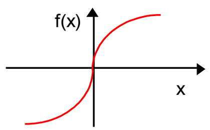


$$a_k=\frac{2}{T}\int_T f(x)\cos(k\omega_0 x)\,dx$$

Ungerade Funktion $f(-x)=-f(x)$

Eine ungerade Funktion enthält nur Sinusanteile

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k\cdot\sin(k\omega_0 x)\right)$$



$$b_k=\frac{2}{T}\int_T f(x)\sin(k\omega_0 x)\,dx$$

15.2.1 Tipps

$$\sin(x)=-\sin(x)$$

$$\cos(-x)=\cos(x)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\cos(k\pi)=(-1)^k$$

$$\sin(k\pi)=0$$

15.3 Energiesatz

$$E=\int_0^T\left[f(x)^2\right]dt=\frac{T}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]$$

Die totale Energie einer Welle ist gleich der Summe der Energien der einzelnen Fourierkomponenten.

15. 4 Komplexe Fourier reihe

Definition

$$\sin(kx)=\frac{e^{jkx}+e^{-jkx}}{2}\qquad\cos(kx)=\frac{e^{jkx}-e^{-jkx}}{2j}$$

Die Fourierreihe ist definiert k=-∞....∞

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 x}$$

Die Fourierkoeffizenten

$$c_k=\frac{1}{T}\int_T f(x)\cdot e^{-j\omega_0 kx}dx$$

15.4.1 Umwandlungen

Komplex-> real

$$c_0=\frac{a_0}{2}$$

$$c_k=\tfrac{1}{2}\left(a_k-jb_k\right)$$

$$c_{-k}=\tfrac{1}{2}\left(a_k+jb_k\right)$$

Real->complex

$$a_0=2c_0$$

$$a_k=c_k+c_{-k}=c_k+\overline{c_k}=2\,\mathrm{Re}(c_k)$$

$$b_k=j(c_k-c_{-k})=j(c_k-\overline{c_k})=-2\,\mathrm{Im}(c_k)$$

15.5 Fourier reihe als beste Approximation

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega_0 x)+b_k\sin(k\omega_0 x)\right]$$

Die Fourreihe ist die beste approximation der Funktion f(x)

Fehler:

Fehler entstande Fehler bei der FT

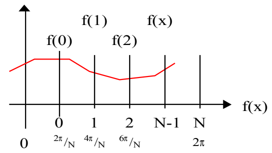
$$\varepsilon=\int_0^T\left|T(x)-f(x)\right|^2dx$$

15.6 Diskrete Fouriertransformation

Gegeben: eine 2 π periodische Funktion durch N Messwerte .
Gesucht: eine trig. Polynom der Form:

$$T(x) = c_0 + \left(c_1 e^{jx}\right) + \left(c_2 \cdot e^{2jx}\right) + \ldots + \left(c_{N-1} \cdot e^{(n-1)jx}\right)$$

$C_0 \ldots C_{n-1}$ sind die zu bestimmenden koeffizenten.
N ist ein vielfaches von 2.



Die **Koeefizenten** sind durch Folgendes Gleichungssystems bestimmt: (Schema)

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_k \\ C_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & \ldots & -j^k & -j^{N-1} \\ 1 & -1 & j & \ldots & -j^{k+1} & -j^N \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -j^k & -j^{k+1} & \ldots & -j^{k+k} & 1 \\ 1 & -j^{N-1} & -j^N & -jN+1 & -j^{N+1+k} & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \ldots \\ f(k) \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

15.7 Diskrete FT mit dem HP 48

Programm
[MATH][FFT][FFT]
Parameter
[f_0 f_1 f_2 f_3 ... f_{N-1}] N ist ein vielfaches von 2
Resultat
[c_0 c_1 c_2 c_3 ... c_{N-1}]

15.7.1 Diskrete inverse FT mit dem HP 48

Programm
[MATH][FFT][IFFT]
Parameter
[c_0 c_1 c_2 c_3 ... c_{N-1}] N ist ein vielfaches von 2
Resultat
[f_0 f_1 f_2 f_3 ... f_{N-1}]

15.8 Fourier integral & Fouriertransformation

15.8.1 Fouriertransformation

Definition

$$F\{f(t)\} = F(\omega)$$

Eine Funktion f(t) im Zeitraum transformieren in eine Funktion F(ω) im Frequenzraum.

Transformation

$$F\{f(x)\} = F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega x} dx$$

f ist ein genügend anständiger, nicht notwendigerweise periodische, Funktion.

15.8.2 Fourier Rücktransformation

Definition

$$F^{-1}\{F(\omega)\} = f(t)$$

Eine Funktion F(ω) im Frequenzraum Transformieren in eine Funktion f(t) im Zeitraum.

Transformation

$$F^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{+j\omega x} d\omega$$

15.8.3 Diverser FT f(t) →F(ω)

f(t)	= F(ω)	
$F\{\delta(t-t_0)\}$	$= \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t_0}$	
$F\{e^{-\lvert t \rvert}\}$	$= \frac{1}{(1+\omega^2)\pi}$	
e^{-at^2}	$= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4a}}}{2\sqrt{a\pi}}$	(a!=0)

Siehe **Stöcker** Seite 668 und folgende

Wenn die rechte Seite f(t) dann verwende Transformationspaar regel weiter vorne.

15.9 Regeln

Linearität der FT

$$F\{\mu \cdot f(t) + \nu \cdot g(t)\} = \mu \cdot F\{f(t)\} + \nu \cdot F\{g(t)\}$$

Transformationspaar

$$F(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} f(-\omega)$$

$f(t) \rightarrow F(\omega)$ ist ein Transformationspaar
dann gilt auch die linke Formel
Zum Beispiel aus dem Stöcker s.668
f eine anständiger Funktion.

FT eines Differential

$$F\left\{\frac{df}{dt}\right\} = j\omega F\{f(t)\}$$

oder allgemein

$$F\left\{\frac{d^n}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F\{f(t)\}$$

Zeitskalierung:

$$f(a \cdot t) \rightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Zeitverschiebung:

$$f(t - t_0) \rightarrow F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

Frequenzskalierung:

$$\frac{1}{|b|} f\left(\frac{t}{b}\right) \rightarrow \frac{F(b\omega)}{2\pi}$$

Frequenzverschiebung:

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow F(\omega - \omega_0)$$

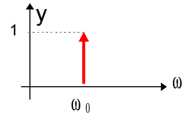
15.9.1 Satz von Parcel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

15.10 Deltafunktion

Definition

$$\delta(\omega - \omega_0) = \begin{cases} 0, \omega \neq \omega_0 \\ \infty, \omega = \omega_0 \end{cases}$$



15.10.1 Eigenschaften der Deltafunktion

1.)

$$\delta(\omega_0 - \omega) = \lim_{N \to \infty} \frac{\sin((\omega_0 - \omega)N)}{\pi(\omega_0 - \omega)}$$

2.) Heavisidefunktion

$$\int_{-\infty}^{\omega} \delta(\tilde{\omega} - \omega_0) d\tilde{\omega} = \begin{cases} 0, \omega < \omega_0 \\ 1, \omega > \omega_0 \end{cases} = H(\omega - \omega_0)$$

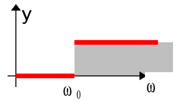
3.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega_0) d\omega = f(\omega_0)$$

15.10.2 Heavieside Funktion (Sprungfunktion)

Definition

$$H(\omega - \omega_0) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_0 \\ 1, & \omega > \omega_0 \end{cases}$$



siehe auch Deltafunktion

Bemerkung

Mit der Heavieside Funktion können auch komplexere Funktion zusammen gebaut werden. Wie Impuls oder Treppen. (* , +/-)

15.11 Faltung zweier Funktionen

Die Faltung zweier Funktionen f(t) und g(t) ist definiert durch:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

15.11.1 Faltungssatz

$$F\{(f * g)(t)\} = 2\pi \cdot F\{f(t)\} \cdot F\{g(t)\}$$

16. Laplacetransformation

Die Laplacetransformation wird verwendet um ***Differentialgleichungen*** und entsprechende Anfangs- und Randwertprobleme zu losen. Die Lösung einer solchen DG wird in 3 Schritten erhalten:

1. ***Die DG wird in eine einfache algebraische Gleichung transformiert.***
2. ***Die einfache Gleichung wird mit Methoden der Algebra gelöst.***
3. ***Die Lösung der einfachen Gleichung wird zurück transformiert; als Resultat erhält man die Lösung der DG***

16.1 Lapcacetransformation

Transformation vom t Raum in den s Raum

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt$$

Die Umformung nach dieser Formel ist nicht immer nötig. Siehe dazu die Regeln weiter hinten.

Im Stöcker p. 701 hat es bereits **bekannte Transformationspaare**.

Die Rücktransformation ist etwas aufwendiger.

16.2 Rücktransformation

Die direkte Rücktransformation kennen wir noch nicht. Wir verwenden ein anders **Vorgehen:**

- F(s) durch (PBZ) parzialbruchzerlegung in Parzialbruche zerlegen.
- Dann Anhand der Transformationspaare im Stöcker p.701 zurück transformieren.
  Verwende auch die Nachfolgenden Sätze und Regeln

Siehe auch PBZ weiter vorne oder im Stöcker p.692f

16.3 Ein kleiner Ausschnitt aus dem Stöcker p. 701

F(s)	●—○	f(t)	
1	●—○	$\delta(t)$	
$\frac{1}{s}$	●—○	1 und $h(t)$	
$\frac{1}{s^2}$	●—○	t und $t \cdot h(t)$	
$\frac{1}{s+a}$	●—○	e^{-at}	
$\frac{1}{s^2+a^2}$	●—○	$\frac{1}{a}\sin(a \cdot t)$	a!=0
$\frac{s}{s^2+a^2}$	●—○	$\cos(a \cdot t)$	a!=0
$\frac{1}{s^2-a^2}$	●—○	$\frac{1}{a}\sinh(a \cdot t)$	a!=0
$\frac{s}{s^2-a^2}$	●—○	$\cosh(a \cdot t)$	a!=0

16.4 Sätze

Transformationssatz

$$L\{a \cdot f(t) + b \cdot f(t)\} = a \cdot F(s) + b \cdot F(s)$$

Existenzsatz

$$|f(t)| \le M \cdot e^{\gamma \cdot t} \quad , \forall\, t \ge 0$$

f(t) darf nicht schnelle als irgendeine Exponentialfunktion wachsen.

M und γ sind Konstanten

Ableitungsregel

$$L\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$L\{f^3(t)\} = s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$$

Allgemein:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{(n-1)} \cdot f(0) - \ldots.. - f^{(n-1)}(0)$$

Integralregel

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x) \cdot dx$$

Verschiebung auf der s-Achse

$$L\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$$

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \cdot f(t)$$

Verschiebung auf der t-Achse

$$L\{f(t-a) \cdot h(t-a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$$

$$L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a) \cdot h(t-a)$$

Verschiebung nach rechts (a>0)

h(t-a) ist eine Sicherheitsmassnahme und meistens nicht nötig

Merkmal: e^{-as}

16.5 Ableitung der Transformierten

$$L\{t \cdot f(t)\} = -F'(s)$$

Vereinbarung:
Alle unsere Funktionen seine 0 für t < 0

16.6 Integration der Transformierten

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) \cdot dr$$

16.7 Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion erhält man durch **eine Impulsantwort mit der δ - Funktion oder der Ableitung davon h(t)-Funktion** (Heaviside)

Die Übertragungsfunktion ist eine von der Eingangsfunktion unabhängige Funktion und man erhält sie durch umformen der Transformierten DG.

Impulsanwort=Gewichtsfunktion $g(t) = L^{-1}\{G(s)\}$

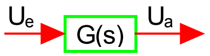
Die **Übertragungsfunktion** enthält alles über die Physik des Systems.

$$U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s)$$

$G(s) \cdot U_e(s)$ entspricht der Faltung

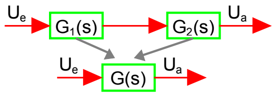
$$(g * u_e)(t)$$

G(s) : Übertragungsfunktion (Laplace-Tra.)
Ua(s) : Ausgangssignal (LT)
Ue(s) : Eingangssignal (LT)



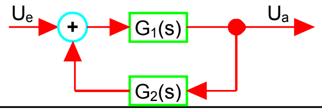
Zusammensetzung von 2 Systemen
Reihenschaltung:

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$



Rückkopplung:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - [G_1(s) \cdot G_2(s)]}$$



16.8 Faltung der Transformierten

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t - x) \cdot dx$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - x) \cdot g(x) \cdot dx$$

$$L\{(f * g)(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

Duhamelsche Formel:

$$u_a(t) = \begin{cases} (g * u_e)(t) \\ (u_{a\delta} * u_e)(t) \\ (u_a{}'_h * u_e)(t) \end{cases}$$

16.9 f ist T - periodisch

Stöcker s. 690

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

16.10 Grenzwertsätze

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} [s \cdot F(s)]$$ Anfangswert

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [s \cdot F(s)]$$ Endwert

Nur wenn die Grenzwerte existieren

17. Z-Transformation

17.1 Z-Transformation einer Zahlenfolge

$$Z\{f\} = F(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell z^{-\ell}$$

Vielfach auch so geschrieben $Z\{f\}=Z\{y_k\}$

17.1.1 Diskretisieren einer Funktion

$$f_k = f(kT)$$

T ist die Abtastrate

17.2 Rücktransformation (Definition)

$$f_k = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Ähnlich wie bei der Laplace Transformation
Siehe mehr 17.5

17.3 Eigenschaften von Folgen

Rechtsverschieben um m Stellen

$$f_{k-m} = (\underbrace{0,0,\ldots,}_{m-\text{Glieder}} f_0, f_1, \ldots)$$

Linksverschieben um m Stellen

$$f_{k+m} = (f_m, f_{m+1}, \ldots)$$

Vorwärts Differenzenfolge

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

Rückwärts Differenzenfolge

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

$$f_k = 0 \quad (\forall\, k < 0)$$

17.3.1 Tip

- Aufzeichnen der ersten paar Glieder
- Manchmal hilfreich

  Sinus in $\frac{e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}}{2j}$ umwandeln
- $f_k=\{1,1,1,1,1,1\} = h_k$ (Heaviside)

Tabelle auf Seite 714 im Stöcker

17.4 Formeln Z-Transformation

Linearität

$$Z\{\alpha \cdot f_k + \beta \cdot g_k\} = \alpha \cdot Z\{f_k\} + \beta \cdot Z\{g_k\}$$

Rückwärtsdifferenzenfolge

$$Z\{\nabla f_k\} = (1 - z^{-1}) F(z)$$

$$Z\{\nabla^2 f_k\} = (1 - z^{-1})^2 F(z)$$

$$Z\{\nabla^n f_k\} = (1 - z^{-1})^n F(z)$$

$Z\{f_k\} = F(z)$

Summationssatz (Integration)

$$Z\left\{\sum_{\ell=0}^{k} f_\ell\right\} = \frac{z}{z-1} Z\{f_k\}$$

Ähnlichkeitssatz

$$Z\{\gamma^{-k} \cdot f_k\} = F(\gamma \cdot z)$$

Rechtsverschiebung

$$Z\{f_{k-m}\} = z^{-m} \cdot F(z)$$

$Z\{f_k\} = F(z)$

Linksverschiebung

$$Z\{f_{k+m}\} = z^m \left[F(z) - \sum_{\ell=0}^{m-1} f_\ell z^{-\ell}\right]$$

$Z\{f_k\} = F(z)$

In einigen fällen ist Summe 0 da das Signal erst nach m Schritten am Ausgang erscheint.

Ableitung der Bildfunktion

$$Z\{k \cdot f_k\} = -z \frac{dF(z)}{dz}$$

$$Z\{k^m \cdot f_k\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m \cdot F(z)$$

$Z\{f_k\} = F(z)$

Faltung

$$(f * g)_k = \sum_{\ell=0}^{k} f_\ell \cdot g_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} f_{k-\ell} \cdot g_\ell$$

$$Z\{f_k * g_k\} = F(z) \cdot G(z)$$

m-Periodische Folge $f_k = f_{k+m}$

$$Z\{f_k\} = \frac{z^m}{z^m - 1} \sum_{\ell=0}^{m-1} f_\ell z^{-1}$$

Dämpfung

$$Z\{\beta^k \cdot f_k\} = F\left(\frac{z}{\beta}\right)$$

ersetze z durch z / β

Anfangswertsatz

Gilt nur wenn der Grenzwert existiert

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

Endwertsatz

Gilt nur wenn beide Grenzwerte existieren

$$\lim_{k \to \infty} f_k = \lim_{z \to 1+}\left[(z-1) \cdot F(z)\right]$$

17.5 Rücktransformation

Tips.

- Funktion mit helfe einfacher Funktionen darstellen.
- Parzialbruch Zerlegung **8.0 PBZ**

Mit hilfe des Anfangswert satzes

Rekursives ermitteln der einzelnen Werte. Ist mühsam

$$f_0 = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

$$f_1 = \lim_{z \to \infty}\left[z \cdot (F(z) - f_0)\right]$$

$$f_2 = \lim_{z \to \infty}\left[z^2 \cdot \left(F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z}\right)\right]$$

$$f_3 = \lim_{z \to \infty}\left[z^3 \cdot \left(F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z} - \frac{f_2}{z^2}\right)\right]$$

$$f_k = \text{usw.}$$

Mit Hilfe der Laurent-Reihe (Potenzreihe)

$$f_k = \frac{1}{k!} \cdot \left.\frac{d^k \hat{F}(y)}{dy^k}\right|_{y=0}$$

$$\hat{F}(y) = F\left(\frac{1}{y}\right) = F(z)$$

Ersetze z durch 1/y (subst.)

y=0 nach dem ableiten einsetzen!

Tabellenbuch
Stöcker p.714

17.6 Übertragungsfunktion/Gewichtsfunktion/Impulsantwort

Siehe dazu **16.7 Laplace** diese Regeln gelten auch für die Z-Transformation

17.7 Anwendung

17.7.1Definitionen

Lineares System

$$u_k \cdot x_k = u_k \cdot y_k$$

x_k :Eingangssignal
y_k :Ausgangssignal
u_k :Faktoren

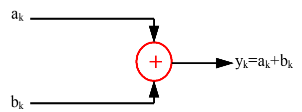
Zeitinvariantes System
Ein um m verzögertes Eingangssignal liefert ein um m verzögertes Ausgabgssignal

Diskretes System
Eingangs- und Ausgangsignal können durch eine Zahlenfolge dargestellt werden.

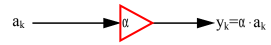
17.7.2 Symbole

Siehe auch Laplace

Addierer



Multiplizierer

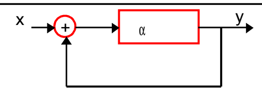


Verzögerungsglied um eine Abtastperiode

Rückkopplung

$$y = yx + x\alpha$$

$$y = \frac{x \cdot \alpha}{1-\alpha}$$



17.8 Bemerkungen

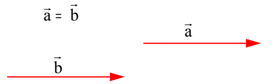
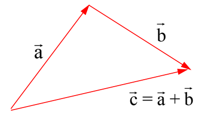
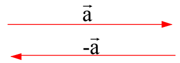
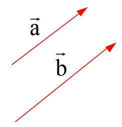
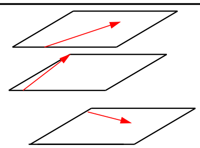
Abtastfrequenz

T ist die Abtastrate

$$f = \frac{1}{T}$$

Umwandlung Laplace - Z - Transformation
Die Umwandlung erfolgt über die inverse Laplacetransformation. Die erhalten Funktion muss dann diskretisiert werden(17.1.1) . Durch das Diskreteren erhält man die y_k welche dann Z-Transformiert werden müssen.

51. Eigenschaften von Vektoren

- **Zwei Vektoren sind gleich** , wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben.	
- **Die Summe zweier Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Vektor, der der Zusammensetzung der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gehörenden Translationen entspricht.	
- **Assoziatives Gesetz**	$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- **Der Kehrvektor von** $\vec{a}$ **ist** $-\vec{a}$	
- **Zwei Vektoren** heissen **kollinear**, wenn sie zu einer einzigen Geraden parallel sind (dabei wird der Nullvektor als zu jeder Geraden parallel betrachtet). $x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \qquad (x, y \in R \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0)$	
- **Drei Vektoren** heissen **komplanar**, wenn sie zu einer einzigen Ebene parallel sind (dabei ist der Nullvektor als zu jeder Ebene parallel zu betrachten). $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0 \quad (x, y, z \in R \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0)$	
- **Vektoren heissen linear unabhängig**, wenn keiner von ihnen eine Linearkombination der andern ist(d.h. eine Summe von Vielfachen der andern) ist, sonst sind sie linear abhängig. Drei Vektoren in einer Ebene und vier Vektoren im Raum sind stets linear abhängig. *Die Determinante verschwindet wenn sie linear abhängig sind.*	

53. Trigonometrische Funktionen

53.1 Definition

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

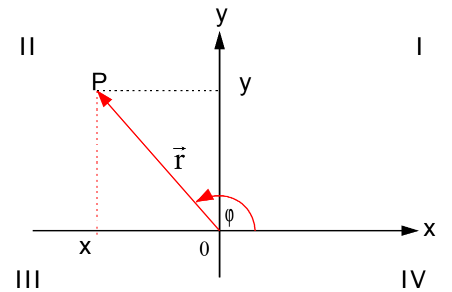
$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

Für einen beliebigen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$\sin(\varphi) = \frac{a_2}{a}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1}{a}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{a_2}{a_1}$$



$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

53.2 Grundbeziehungen

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

Quadrantenrelation

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$

Umwandlung Polar in rechtw. Koord.

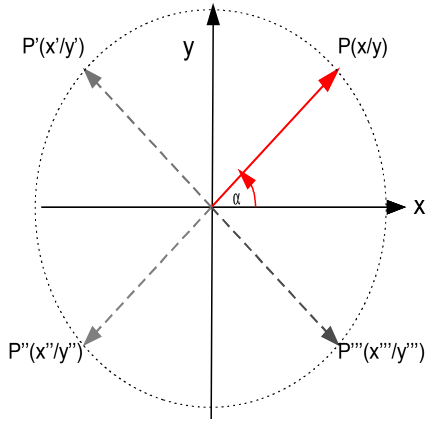
$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

Umw. rechtw. In Polare Koord.

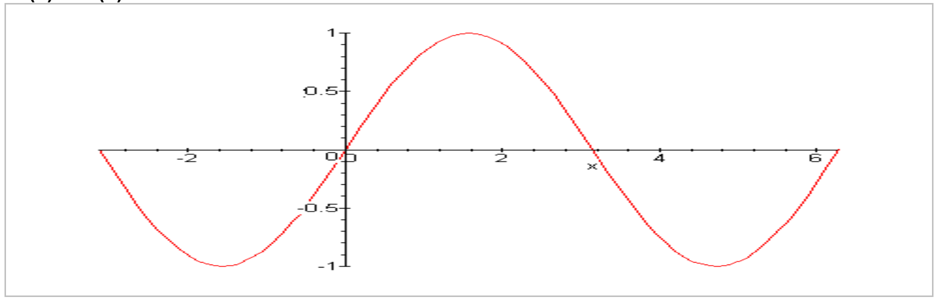
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

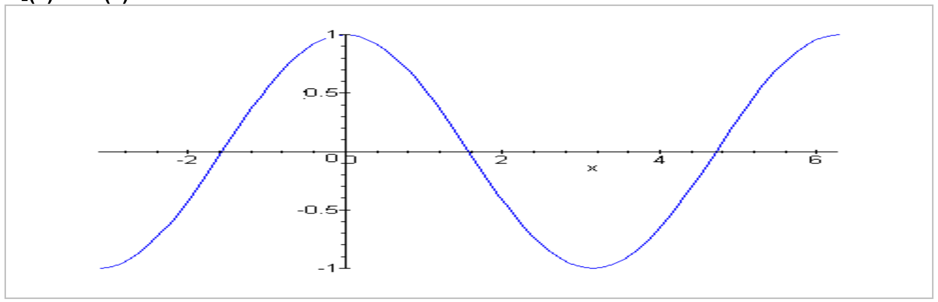


53.3 Grafiken der Verschiedenen Trigonometrischen Funktionen

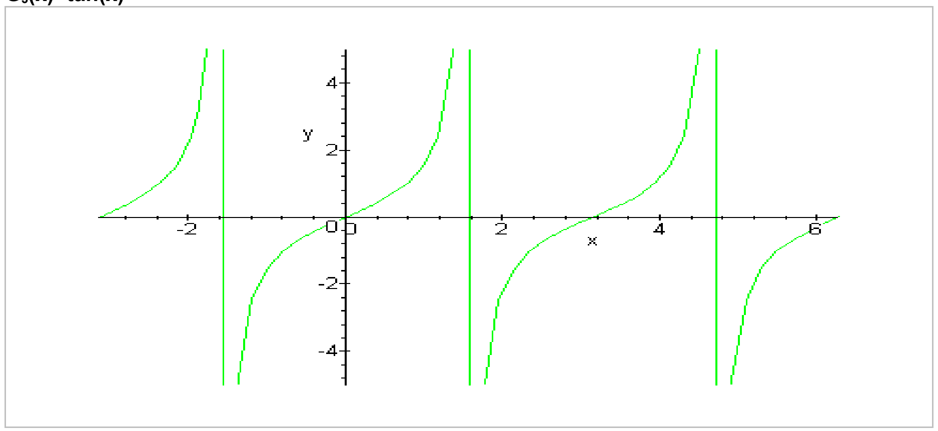
$G_1(x)=\sin(x)$



$G_2(x)=\cos(x)$



$G_3(x)=\tan(x)$



53.4 Sin , Cos , Tan Tabelle

Winkel °	Winkel rad	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	½	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	¼ π	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	½	$\sqrt{3}$
90°	½ π	1	0	$\pm\infty$
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-½	$-\sqrt{3}$
135°	¾ π	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	½	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7}{6}\pi$	- ½	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-½	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\pm\infty$
300°	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	½	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
330°	$\frac{11}{6}\pi$	-½	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
360°	2π	0	1	0

54. Sinussatz und Cosinussatz

Sinussatz:

$$\sin(\alpha):\sin(\beta):\sin(\gamma) = a:b:c$$

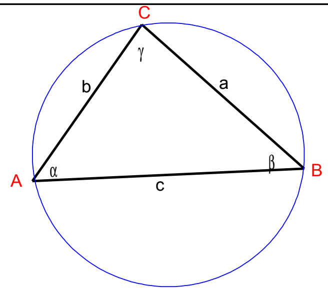
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(\beta)$$



Harmonische Schwingungen

$$a_2 = a\sin(\varphi) = a\sin(\varphi\ t + \alpha)$$

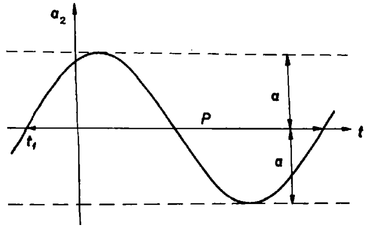
Periode:

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$t_1 = -\frac{\alpha}{\varpi}$$

Frequenz:

$$f = \frac{\varpi}{2\pi}$$



a_2 : Elongation
a : Amplitude
α : Phasenkonstante (Verschiebung)
ω : Kreisfrequenz

Superposition zweier harmonischer Schwingungen

Bemerkung:

Die Superposition zweier harmonischer Schwingungen mit <u>ungleicher Frequenz</u> ist <u>keine harmonische Schwingung</u> mehr.

Superposition von A' und B'

$$c_2 = c\sin(\varpi\ t + \gamma)$$

oder wegen $c_2 = a_2 + b_2$

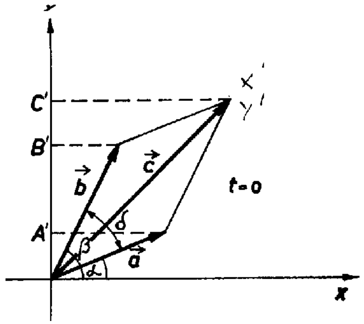
$$c_2 = a\sin(\varpi\ t + \alpha) + b\sin(\varpi\ t + \beta)$$

Amplitude

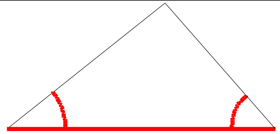
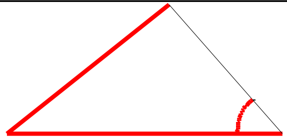
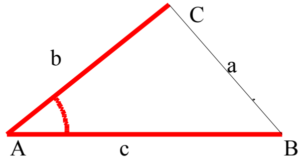
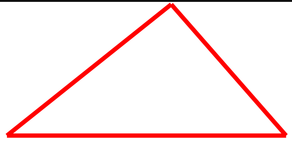
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)}$$

Phasenkonstante zur Zeit t=0

$$\tan(\gamma) = \frac{c_2}{c_1} = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{a\sin(\alpha) + b\sin(\beta)}{a\cos(\alpha) + b\cos(\beta)} = \frac{x'}{y'}$$



Anwendungen bei schiefen Dreiecken

Gegeben	Figur	Satz
WSW		Sinussatz
SSW		Sinussatz
SWS		Cossinussatz
SSS		Cossinussatz

55. Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

55.1 Die trigonom. Funktion der Summe und Differenz zweier Winkel

(Siehe auch Stöcker letzte Seite)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

55.2 Die trigonom. Funktion des doppelten und des halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\ \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

55.3 Trigonometrische Gleichungen

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1-3\tan^2(\alpha)}$$

55.4 Quadrantenrelation zusatz

$$\sin(x) = \cos\left(x - \pi/2\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \pi/2\right)$$

56. Gleichungen der Geraden

Parametergleichung

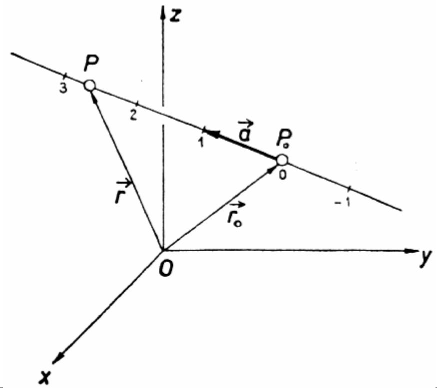
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$$

Komponentengleichung

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}_x$$
$$\vec{y} = \vec{y}_0 + t\vec{a}_y$$
$$\vec{z} = \vec{z}_0 + t\vec{a}_z$$

Spurpunkte:

Die Spurpunkte sind die Schnittpunkte S_1, S_2, S_3 der XY-,YZ- und der ZX-Ebene. Es gilt $S_1=(x,y,0)$, $S_2=(0,y,z)$, $S_3=(x,0,z)$.



Koordinatengleichung der Ebene

Aus dem Gleichungssystem den Parameter t entfernen

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}_x$$
$$\vec{y} = \vec{y}_0 + t\vec{a}_y$$

dann erhält man eine lin.Gleichung der Form:

$$Ax + Bz + C = 0$$

wobei A,B u. C scalare Faktoren sind.

Möchte man einen Punkt auf der Geraden bestimmen so muss man die gleichung nur nach x oder y auflösen und dann einen wert einsetzen.

Punkt-Richtungsform der Ebene

Aus dem Gleichungssystem den Parameter t entfernen

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}_x$$
$$\vec{y} = \vec{y}_0 + t\vec{a}_y$$

dann erhält man eine Gleichung der Form:

$$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$$

wobei

$$m = \tan\varphi = \frac{a_y}{a_x}$$

m: Steigung

Es gilt:

m = 0 ($\varphi=0$) parallel zur x-Achse

m > 0 ($0<\varphi<90$) steigend

m < 0 ($90<\varphi<180$) fallend

Normalform der Geradengleichung

Bezeichnet man den Punkt wo die gerade die y-Achse schneidet mit Q(0,q) so lautet die Gleichung

$$y - q = m(x - 0)$$

daraus folgt

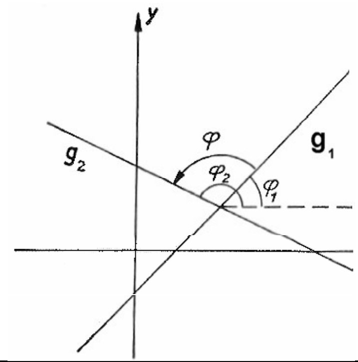
$$y = mx + q$$

Winkel zwischen zwei Geraden

$$\varphi_1 + \varphi = \varphi_2$$

$$\tan\varphi = \tan(\varphi_2 - \varphi_1)$$

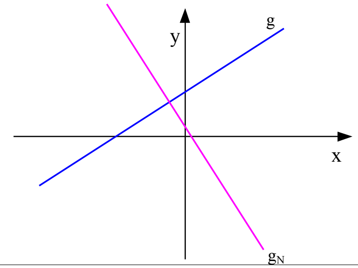
$$\tan\varphi = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_2 \tan\varphi_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$



Normale einer Geraden(Senkrechte)

Gilt bei der Punktrichtungs form m als Steigung so ist die Normale der negative Kehrwert.

$$m_N = -\frac{1}{m} \qquad m = -\frac{1}{m_N}$$

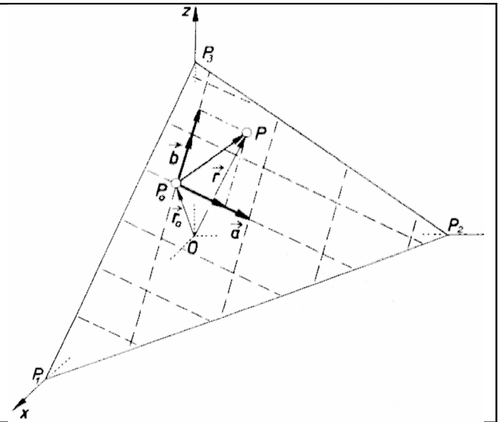


57. Die Gleichungen der Ebene

57.1 Die Parametergleichung der Ebene

$$\overrightarrow{P_0 P} = u\vec{a} + v\vec{b}$$
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$



57.2 Koordinatengleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Umwandlung von Parametergleichung in Koordinatengleichung durch schrittweises Eliminieren von u und v

BSP

```
              x =   3 + 3u -5v
              y =     - 6u -4v
              z =   6 -10u -2v
          y-2z = -12 +14u
        2x -5z = -24 +56u
   -2x+4y -3z = -24
  2x+4y+3z-24 =   0
```

57.3 Schnitt von Geraden und Ebenen

Zwei sich schneidende Ebenen sind durch Ihre Koordinatengleichung gegeben.

1. z=t;

Gleich 1: $A_1 x + B_1 y + C_1 t + D_1 = 0$

Gleich 2: $A_2 x + B_2 y + C_2 t + D_2 = 0$

2. Gleichungssystem nach x und y auflösen;

$$x = E + Ft$$
$$y = G + Ht$$
$$z = t$$

3. Als Parametergleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ G \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} F \\ H \\ 1 \end{pmatrix}$$

57.4 Umwandlung Koordinatengleichung in Parametergleichung

In einer gegebenen Koordinatengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

werden

$$x = u$$
$$y = v$$
$$z = \frac{-d - uA - vB}{C}$$

gesetzt

Dabei ergibt sich folgende Parametergleichnung ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ? \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ? \end{pmatrix}$$

58. Das Scalare Produkt zweier Vektoren

58.1 Allgemein

HP48G: [MTH][VECTOR][DOT]
Das Scalare Produkt ist kein Vektor sondern eine Zahl

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{ab}$$

$a = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $|a| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$ Räumlicher Pythagoras

Bem:
Das Scalare Produkt zweier zueinander Senkrecht stehenden Vektoren ist 0

58.1 Zwischenwinkel

Als **Zwischenwinkel** bezeichnet man den Winkel zwischen einem Vektor und den Koordinatenachsen.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{a \cdot 1} = \frac{a_1}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{a}$$

cos α,cos β und cos γ heissen die **Richtungscosinus** von $\vec{a}$

Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

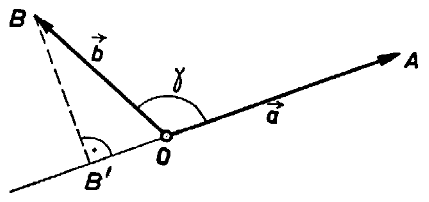
Distributivgesetz:

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

$$x\vec{a} \bullet y\vec{b} = xy(\vec{a} \bullet \vec{b})$$

58.3 die vektorellen Komponenten

Unter der **vektorellen Komponenten** von $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$ versteht man die Projektion von $\vec{b}$ auf die Gerade von $\vec{a}$.



$$0\vec{B} = \vec{b}_{\vec{a}}$$

$$b_a = \cos\gamma$$

$$b_a = \vec{e}_{\vec{a}} \bullet \vec{b}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{b}_{\vec{a}} = (\vec{e}_{\vec{a}} \bullet \vec{b})\vec{e}_{\vec{a}}$$

Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{a}$

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \vec{a} \bullet \vec{b}$$

Beachte:

$(\gamma > \frac{\pi}{2})$ $\vec{b}_{\vec{a}}$ zeigt in Richtung von $\vec{a}$ und nicht $-\vec{a}$

59. Zueinander normale Geraden und Ebenen

Es gilt:

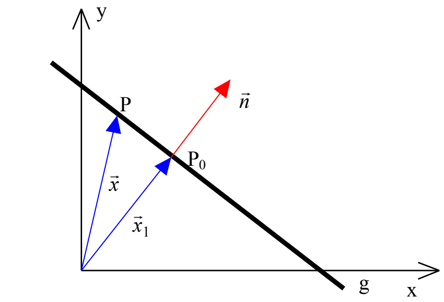
$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \bullet \vec{n} = 0$$

Für die Geradengleichung von g gilt:

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Der Normalvector lautet (länge 1)

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$



Für die Ebenengleichung gilt:

$$\frac{Ax}{\sqrt{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Der Normalvector der Ebene lautet (länge 1)

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Es gilt für den Abstand vom Ursprung:

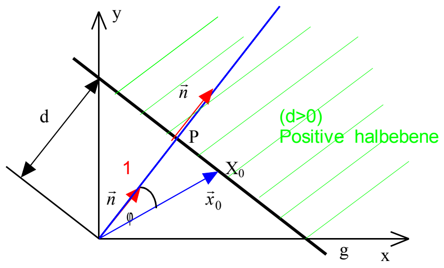
$$d = \cos(\gamma)\left|\vec{x}_0\right|$$

Für die Geradengleichung gilt:

$$d = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Für die Ebenengleichung gilt:

$$d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Für d gilt:

(d>0) Dann liegt der Ursprung in der entgegengesetzten Richtung wie der Normalvector zeigt.

59.1 Hessische Normalform (HNF)

Hessische Normalform (HNF)

$$0 = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Bestimme Abstand eines Punktes von der Geraden oder Ebene

$$\pm d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \pm d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

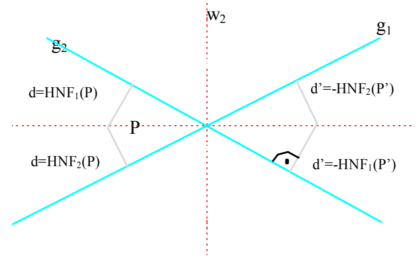
Der Punkt ist dabei x,y(,z)

Ist (d>0) dann liegt der Punkt in Richtung des Normalenvektors

Winkelhalbierende

w₁: $HNF_1(P) = +HNF_2(P)$

w₂: $HNF_1(P) = -HNF_2(P)$



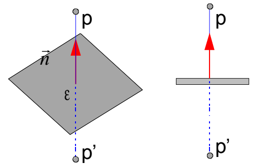
Berechnung eines Spiegelpunkts an einer Ebene

$$\vec{x}_p' = \vec{x}_p - 2HNF_\varepsilon(P)\vec{n}$$

$$\vec{x}_p' = \vec{x}_p - 2\frac{Ax_p + By_p + Cz_p + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

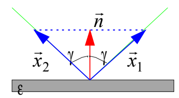
x_p ist der Ortsvektor vom Punkt P

Ax+By+Cz+D=0 ist die Ebenengleichung



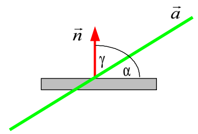
Spiegelpunkt an der Normalen auf einer Ebene

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 - 2\vec{n}(\vec{n} \bullet \vec{x}_1) \qquad \left|\vec{n}\right| = 1$$



Neigungswinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene bzw. Normalen

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{n} \bullet \vec{a}}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{a}\right|}$$



60. Kreis und Kugel

60.1 Gleichung des Kreises

$$(x - r_{mx})^2 + (y - r_{my})^2 - R^2 = 0$$

oder

$$\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r}_m \bullet \vec{r} + \vec{r}_m^{\,2} - R^2 = 0$$

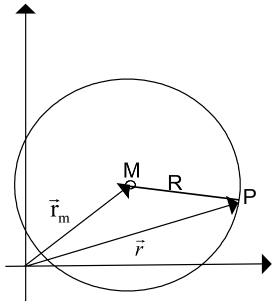
allgemein der Form

$$\vec{r}^{\,2} + \vec{p} \bullet \vec{r} + q = 0$$

ausgeschrieben

$$x^2 + y^2 + p_1 x + p_2 y + q = 0$$

x,y Punkt des Mittelpunkts $\qquad$ $p_{1,2}$ Punkt P



60.2 Gleichung des Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + q = 0$$

60.3 Zusammenhänge

Für eine Kugel/Kreis gilt:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0 \qquad \vec{r}_m = -\frac{\vec{p}}{2} \qquad R = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

60.4 Schnittpunkt Kreis - Gerade

Die Geradengleichung nach x (oder y) auflösen und in der Kreisgleichung einsetzen. Dann quad.gleich. nach $y_{1,2}$ auflösen und mit diesen Resultaten x_1, x_2 berechnen.

Kreis:	$x^2 + y^2 + p_1 x + p_2 y + q = 0$
Gerade :	$Ax + By + C = 0$
mit x:	$(-By - C)^2 + y^2 + p_1 (-By-C) + p_2 y + q = 0$

60.5 Durchstosspunkte der Kugel mit einer Geraden in Parameterform

$$\left((x = x_0 + ta_1) - r_{mx}\right)^2 + \left((y = y_0 + ta_2) - r_{my}\right)^2 + \left((z = z_0 + ta_3) - r_{mz}\right)^2 = R^2$$

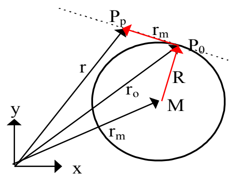
60.6 Tangente/(Tangentialebene)

Punkt in Form $P_0(p_x, p_y, p_z)$ gegeben.

Kreis in Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + q = 0$$

gegeben.



Es gilt:

$$(\vec{r}_o - \vec{r}_m) \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

und

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_m) \bullet (\vec{r} - \vec{r}_m) = R^2$$

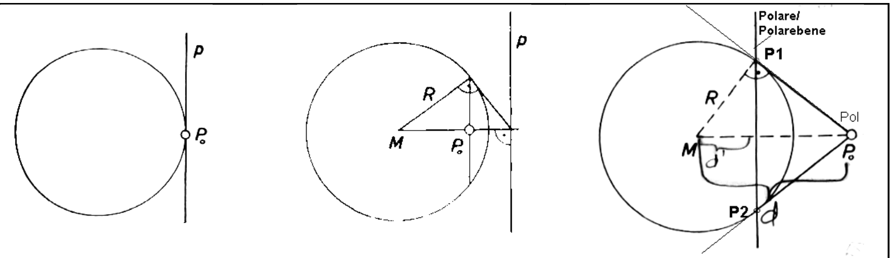
oder

$$(\vec{r}_0 \bullet \vec{r}) + \left[\frac{1}{2}\vec{p} \bullet (\vec{r}_0 + \vec{r})\right] + q = 0$$

Die dazugehörige Tangentengleichung ist:

$$Axp_x + Byp_y + Czp_z + \frac{D}{2}(x + p_x) + \frac{E}{2}(y + p_y) + \frac{F}{2}(z + p_z) + q = 0$$

60.7 Polare/(Polarebene)§



1. Setzt man den Punkt P_0 in die Tangentengleichung ein so erhält man die Polare (Polareben).
2. Setzt man diese wieder um in die Kreisgleichung ein erhält man die Punkte P1,P2
3. Diese eingesetzt in die Tangentengleichung ergeben Tangente 1 und 2.

60.7.1 Eigenschaften der Polare (Polarebene)

$$\frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_m)(\vec{r} - \vec{r}_m) - R^2}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_m\right|} = 0$$

$$\pm\ d' = \frac{-R^2}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_m\right|} = \frac{-R^2}{d}$$

$$d' \cdot d = R^2$$

60.7.2 Gesucht der Pol

Gegeben Kreis(Kugel)	$x^2 + y^2 + z^2 + Ux + Vy + Wz + q = 0$
Gegeben Gerade(Ebene)	$Ax + By + Cz + D = 0$
Gesucht	Pol $P_0(p_x/p_y/p_z)$

Die Verhältnisgleichungen lauten:

$$\left(p_x + \frac{U}{2}\right) : \left(p_y + \frac{V}{2}\right) = A : B$$

$$\left(p_y + \frac{V}{2}\right) : \left(p_z + \frac{W}{2}\right) = B : C$$

$$\left(p_z + \frac{W}{2}\right) : \left(\frac{Up_x + Vp_y + Wp_z + 2q}{2}\right) = C : D$$

Diese 3 Gleichungen nach P_x,P_y und P_z auflösen

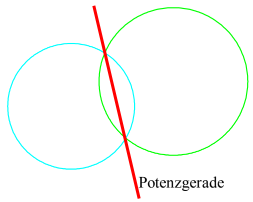
60.8 Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises oder einer Kugel

Die Potenzgerade(Potenzebene) erhält man in dem sich 2 Kreise (Kugeln) schneiden.

$$\mathbf{I}: x_1^2 + y_1^2 + Cx_1 + Dy_1 + q_1 = 0$$

$$\mathbf{II}: x_2^2 + y_2^2 + Cx_2 + Dy_2 + q_2 = 0$$

Die Potengerade(-ebene) erhält man in dem die I -II rechnet so dass x^2 und y^2 verschwinden.



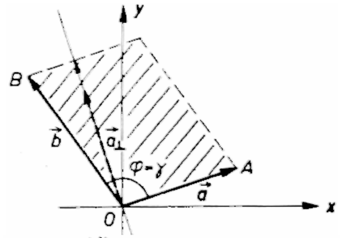
61. Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

HP48 =[MTH][VECT][CROSS]

Siehe Algebra

Flächenprodukt

Das Flächenprodukt ist gleich dem positiven oder negativem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms



Zwei Vektoren sind kollinear wenn:

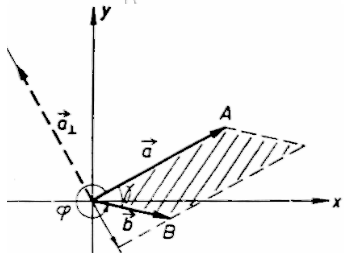
$[a,b] = 0$

Die Fläche eines Dreiecks:

$F = \frac{1}{2} ab \sin(\gamma)$

Das Flächenprodukt ist somit:

$$[a,b] = \vec{a}_\perp \bullet \vec{b}$$



Das Vektor Produkt wird wie Folgt gerechnet

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Wird geschrieben zu

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{matrix}$$

$$=> \begin{pmatrix} \boxed{a_2 \cdot b_3} & - & \boxed{a3 \cdot b_2} \\ a_3 \cdot b_1 & - & a1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 & - & a2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Gesetze:	
1. Das kommutativ Gesetz	$[\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{a},\vec{b}]$
2. Das assoziative Gesetz	$[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$
3. Sind *x, y* reelle Zahlen	$[x\vec{a}, y\vec{b}] = xy[\vec{a},\vec{b}]$

62. Das Spatprodukt

HP48=[MTH][MATR][NORM][DET]

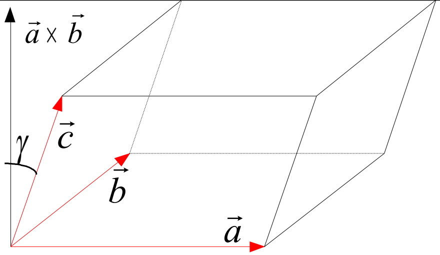
Siehe auch „Berechnung der Determinate“ in Algebra

Definition:

Unter einem Spatprodukt von drei Vektoren versteht man das positive oder negative Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Spats(Je nach links oder rechtssystem).

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$$

(Für Bestimmung Rechts- oder Linkssystem Schraubenregel verwenden)



Gesetze

1. $\left[\vec{a},\vec{b},c\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$

2 $\pm V=F\cdot c\cos\gamma=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c}$

3. $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ Eine sog. 3-gliedrige Determinante

4. $\left[x\vec{a},y\vec{b},z\vec{c}\right]=xyz\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$

5. $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right]=\left[\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right]+\left[\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right]$

Cramersche Regel zur Lösung eines Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

Die Gleichung $\begin{matrix}a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1\\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2\\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3\end{matrix}$ kann als Vektorgleichung

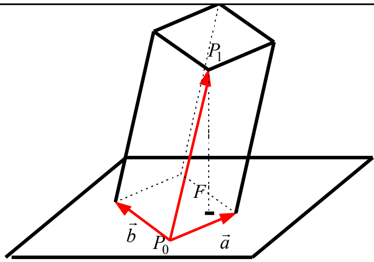
geschrieben werden $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}$ so das gilt:

$$x=\frac{\left[\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right]}{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]},\quad y=\frac{\left[\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right]}{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]},\quad z=\frac{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right]}{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]}$$

Abstandsprobleme

1.Abstand eines Punktes P1 von einer Ebene $\vec{r}=\vec{r}_0+u\vec{a}+v\vec{b}$

$$d=\frac{\left\|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{r}_1-\vec{r}_0\right]\right\|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}\quad \overline{P_0P_1}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$$

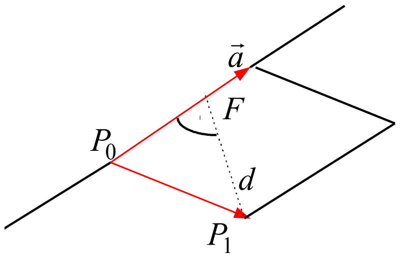


2. Abstand eines Punktes von einer Geraden $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}$ im Raum

$$d=\frac{\left|\vec{a}\times\left(\vec{r}_1-\vec{r}_0\right)\right|}{a}\quad \overline{P_0P_1}=\vec{r}_1-\vec{r}_0$$

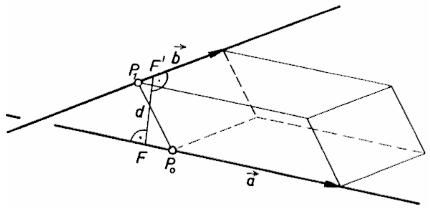
Berechnung des Fusspunktes F

$$F=P_0+\frac{\vec{a}\bullet\left(\vec{r}_1-\vec{r}_0\right)}{a^2}\vec{a}$$



3. Abstand zweier windschiefer Geraden $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}$ und $\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{b}$

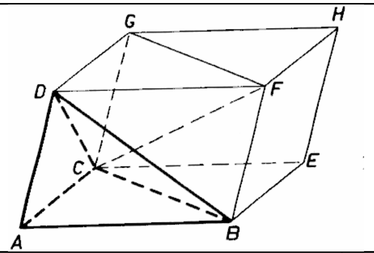
$$d=\frac{\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{r}_1-\vec{r}_0\right]\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$



Geometrische Probleme

1. Volumen eines Tetraeaders

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$$



Mehrfachprodukt

1. Dreifachprodukt

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\vec{c}$$

2. Vierfachprodukt

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right)\left(\vec{b} \bullet \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \bullet \vec{d}\right)\left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right)$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right]\vec{c} - \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\vec{d}$$

3. Beweis der Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie

Seiten-Cosinussatz

$$\cos(a) = \cos(b)\ \cos(c) + \sin(b)\ \sin(c)\ \cos(\alpha)$$

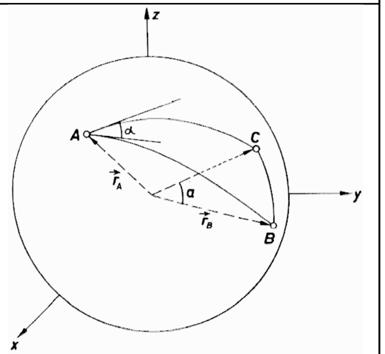
a,b,c in Bogenmass

Sinussatz

$$\sin(b)\ \sin(\alpha) = \sin(a)\ \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha)\ \sin(b)\ \sin(c) = \left|\left[\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C\right]\right|$$

+ zyklisches Vertauschen



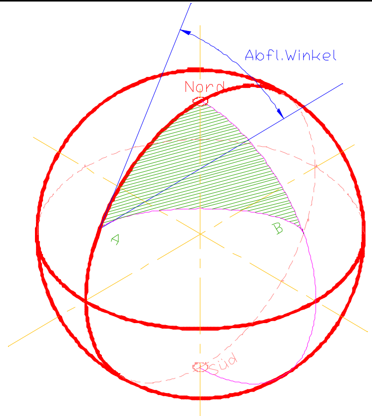
Winkel-Cosinussatz

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\ \cos(\gamma) + \sin(\beta)\ \sin(\gamma)\ \cos(a)$$

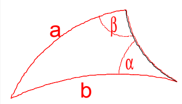
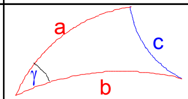
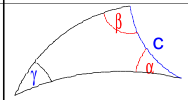
$$und\ "zyklischevertauschung"$$

Problem Flugverkehr auf der Erde

(Achtung bei Flug von Nordhalbkugel zur Südhalbkugel)



Wann wird welcher Satz verwendet

Sinussatz SS		Drei der roten Stücke müssen gegeben sein, dann kann man mit dem Sinussatz das vierte berechnen.
Seiten Cosinussatz SKS		Rote Stücke gegeben, eines der blauen gesucht und das andere ebenfalls gegeben, dann kann das gesuchte Stück mit dem SKS berechnet werden.
Winkel Cosinussatz WKS		Rote Stücke gegeben, eines der blauen gesucht und das andere ebenfalls gegeben, dann kann man das gesuchte Stück mit dem WKS berechnet werden.

Fläche eines Sphärischen Dreiecks

In einem Sphärischen Dreieck gelten die Ungleichungen:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi$$

$$0 < a + b + c \leq 2\pi$$ (a,b,c in Bogenmass [$a = {a'}/{r}$])

Der Exzess eines Kugeldreieck ist Def.

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Daraus ergibt sich die Fläche:

$$A = \varepsilon \cdot r^2$$

98. Spezielle Gleichungen

98.1 Grundmenge G   Lösungsmenge L

$L = G$	Identität,tantalogie oder kantalogie Gleichung
$L = \phi$	Kontradiktion oder kontradiktorrisch Gleichung
$\phi \leq L \leq G$	Bedingungsgleichung

98.2 Ungleichungen

98.2.1 Einige Regeln

(iii)	**Falls** c>0: c<0:	**a<b , dann gilt für** ac < bc ac > bc		
(iv)	**Falls**	**a<b und c<d, dann gilt** a+c < b+d		
(v)	Falls aus	a>0 und b>0 $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	oder	a<0 und b<0, dann folg

98.3 Lösen von Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen werden gelöst in dem man alle ausdrücke mit der Wurzel auf eine Seite bringt.
Dann wird durch quadrieren die Wurzelausdrücke eliminiert.

Achtung!

Es können neue Lösungen entstehen. D.h es muss kontrolliert werden ob jede Lösung eine gültige Lösung ist.

98.4 Lösen von Exponentialgleichungen

Den Ausdruck mit dem x im Exponenten in Faktoren umformen

$$a^x \cdot c = b^z \cdot d$$

oder

$$a^x = b^z$$

Dann auf beiden Seiten den Logarithmus ziehen. (Regeln siehe Logarithmen)

$$x \ln(a) = z \ln(b)$$

$$x = \frac{z \ln(b)}{\ln(a)}$$

98.5 Lösungsmenge mittels des Rang Kriterium

Gleichung der Form

zb.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Koeffizienten nxm Matrix

zb von oben.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix nx(m+1)

zb. von oben

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist nach folgender Tabelle definiert

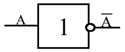
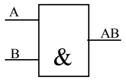
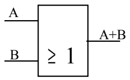
	n<m		*n=m*		*n>m*	
	Rg(A')<n	**Rg(A')=n**	**Rg(A')<n**	**Rg(A')=n**	**Rg(A')<n**	**Rg(A')>n**
Rg(A)<Rg(A')	Keine Lös.	Keine Lös.	Keine Lös.	Keine Lös.	Keine Lös.	Keine Lös.
Rg(A)=Rg(A')	Unendl.Lös .	Unendl.Lös .	Unendl.Lös .	**Eine Lös.**	Methode der	kleinsen Quadr.

99. Boolesche Algebra

Boolesche Verknüpfung

Bezeichnung	*Notation*	*Bemerkung*
Negation	NOT, $\bar{x}$	
Konjuction	AND, $\wedge$, $\cdot$	Auf das · kann verzichtet werden
Disjunktion	OR, $\vee$, +	

Verwendete Symbole

NOT		A | $\bar{A}$ 0 | 1 1 | 0
AND		A B | AB 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		A B | A+B 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1

Prioritäten

1. NOT
2. AND
3. OR

Rechenregeln

1.)	$\bar{0} = 1 ;\ \bar{1} = 0 ;\ \bar{\bar{A}} = A$	
2.)	$A + 0 = A \quad ; \ A \cdot 0 = 0$	
3.)	$A + 1 = 1 \quad ; \ A \cdot 1 = A$	
4.)	$A + A = A \quad ; \ A \cdot A = A$	
5.)	$A + \bar{A} = 1$	Tautologi
6.)	$A \cdot \bar{A} = 0$	Kontra...
7.)	$A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$	Kommotativgesetz
8.)	$(A + B) + C = (A + B) + A$ $(A \cdot B) \cdot C = (A \cdot B) \cdot A$	Assoziativgesetz
9.)	$A \cdot (B + C) = AB + AC$ $A + (B\ C) = (A + B) \cdot (A + C)$	Distributivgsetz
10.)	$\overline{AB} = \bar{B} + \bar{A}$ $\overline{A + B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$	